
Диссертация
на соискание ученой степени кандидата наук
Об эффектах магнитных примесей и
взаимодействия
на свойства неупорядоченных металлов

Евгений Витальевич Репин



НИУ Высшая Школа Экономики
г. Москва
2020 г.

Оглавление

Введение	4
1 Неупругое рассеяние электронов...	13
1.1 Мотивация	13
1.2 Формализм	15
1.3 Сечение в режиме котуннелирования	17
1.4 Квантовая точка с одним уровнем	18
1.5 Многоуровневая квантовая точка	20
1.6 Неупругое сечение без магнитного поля	23
1.7 Неупругое сечение с магнитным полем	27
1.8 Неупругое сечение со спин-орбитой	30
1.9 Времена дефазировки	32
1.10 Пренебрежения	34
1.11 Релевантность для экспериментов	35
1.12 Заключение	36
2 Квантовые поправки к проводимости...	39
2.1 Нелинейная сигма-модель Финкельштейна	40
2.2 Пертурбативное разложение	44
2.3 Вычисление проводимости	50
2.4 Логарифмическая поправка	53
2.5 Заключение	55
3 Собственные операторы ренормгруппы...	57
3.1 Формализм нелинейной сигма-модели	57
3.2 Локальные операторы без производных	59
3.3 Двухпетлевая перенормировка \mathcal{K}_q	61
3.4 Перенормировка методом фонового поля	66
3.5 Выводы и заключение	69

4 Приложение	73
4.1 Вычисление функции Грина для электронов в квантовой точке во втором порядке по туннелированию	73
4.2 Соотношение $\mathcal{A}_{\text{inel}}^{\sigma}(\varepsilon)$ и...	75
4.3 Детали двухпетлевой перенормировки \mathcal{K}_q	77
4.4 Билинейные по Q операторы	77
4.5 Операторы с тремя Q	83
4.6 Операторы с четырьмя Q	84
4.7 Операторы с более чем четырьмя Q	85
4.8 Перенормировка фонового поля	86
4.9 Операторы с тремя Q	87
4.10 Операторы с четырьмя Q	88
Список литературы	89

Введение

Электронные свойства мезоскопических проводников были предметом активного исследования на протяжении многих лет. Хорошо известные результаты, полученные в этой области, включают эффект Кондо [49], слабо-локализационную поправку [13] и мультифрактальность волновых функций вблизи перехода металл-изолятор [58, 32, 25]. Эффект Кондо - это увеличение удельного сопротивления металла с магнитными примесями при понижении температуры, которое можно объяснить логарифмической перенормировкой обменного взаимодействия электронов с примесным спином. Это иллюстрирует квантовую интерференцию амплитуд рассеяния, приводящую к увеличению скорости рассеяния, которая приводит к увеличению удельного сопротивления. Важно отметить, что квантовая природа спина примесей должна быть учтена для объяснения эффекта. Кроме того, квантовые эффекты в динамике спина могут сделать рассеяние электронов на магнитной примеси неупругим, например, из-за зеемановского расщепления уровней примеси во внешнем магнитном поле (зеемановское расщепление делает рассеяние при перевороте зависимым от энергии и подавляет его из-за поляризации спина вдоль магнитного поля [91]). Неупругое рассеяние электронов на магнитной примеси приводит к другому наблюдаемому эффекту: подавлению когерентности электронных волн за счет реального неупругого рассеяния.

Простейшая модель для квантовых примесей - это спины $S = 1/2$, локализованные в пространстве. В реальных материалах с кулоновским взаимодействием магнитная примесь со спином $1/2$ может быть образована электроном, занимающим локализованный уровень [78]. Магнитная примесь со спином $S > 1/2$ может быть имитирована ловушкой с множеством локализованных в ней электронов. Недавно такие электронные капли со спином $S \approx 2$ (на одну каплю) были обнаружены в двумерной (2D) электронной системе в Si-MOSFET с помощью термодинамических измерений

намагниченности образца [73, 87]. При наличии сильного обменного взаимодействия в двумерной неупорядоченной электронной системе при низких температурах спин электронной капли может быть конечным из-за явления мезоскопической неустойчивости Стонера [52], [65]. Конечный спин электронной капли приводит к поведению типа Кюри для спиновой восприимчивости. В этих экспериментах температурная зависимость измеренной намагниченности согласуется с законом Кюри для спиновой восприимчивости одной капли при условии, что их концентрация обратно пропорциональна температуре [73, 87]. По мотивам этих экспериментов [73, 87] мы рассмотрим влияние таких многоэлектронных капель с конечным спином на транспортные свойства двумерной электронной системы в главе 1. В частности, мы оцениваем вклад во время дефазировки из-за неупругого электронного рассеяния на таких каплях при низких температурах (T).

Другим примером квантовой интерференции электронных амплитуд, приводящей к макроскопическим наблюдаемым следствиям, является слабо-локализационная поправка. В этом случае две электронные траектории в неупорядоченном образце, проходящие в двух противоположных направлениях, конструктивно интерферируют. Это приводит к увеличению вероятности того, что электрон вернется в исходное положение, и следовательно, уменьшится проводимость. Наличие возмущений, разрушающих инвариантность по отношению к обращению времени, таких как магнитные примеси, рассмотренные выше, или магнитное поле, делает две траектории не эквивалентными и, таким образом, подавляет эффект. Вклад во время дефазировки, обусловленный рассмотренным выше неупругим рассеянием на магнитных примесях, влияет на зависимость слабо-локализационной поправки от температуры и магнитного поля [91, 60, 19, 61, 45]. Дополнительное влияние магнитных примесей на проводимость заключается в следующем. Оказывается, что помимо влияния на слабо-локализационную поправку неупругое рассеяние на магнитных примесях приводит к появлению поправки типа Альтшулера-Аронова на проводимость [69, 68, 85]. Основное отличие этого эффекта от описанного выше заключается в том, что он обусловлен виртуальными процессами, а не реальными переходами. Эти температурозависимые поправки были найдены ранее в третьем порядке в обменном взаимодействии. Легко показать, почему это самый низкий порядок, в котором такие поправки могут возникать. Действительно, для того, чтобы иметь неупругое рассеяние магнитной примеси в пределах приближения Борна, необходимо иметь расщепление Зеемана. Однако, расщепление Зеемана индуцирует обрезку для

соответствующих диффузионных мод. Это запрещает зависящую от температуры поправку к проводимости во втором порядке по обменному взаимодействию. Однако, вышеприведенные аргументы предполагают, что расщепление Зеемана для магнитной примеси и для электрона одинаково, что верно при условии, что их g -факторы близки.

Во второй главе мы рассматриваем случай очень разных g -факторов электрона, g_e и магнитной примеси g_i : $|g_i| \gg |g_e|$. В этом случае зеемановское расщепление для примеси, $b_i = g_i \mu_B H$ может быть намного больше, чем электронное расщепление Зеемана, $b_e = g_e \mu_B H$, здесь μ_B означает магнетон Бора, а H - внешнее магнитное поле. Для конкретности рассмотрим двумерную электронную систему в параллельном магнитном поле H . Затем, как мы покажем, существует логарифмическая поправка по T к проводимости за счет неупругого рассеяния на магнитных примесях в приближении Борна при условии, что температура удовлетворяет неравенствам:

$$|b_e| \ll T \ll |b_i|. \quad (1)$$

Кроме того, мы рассматриваем, как неупругое рассеяние на магнитных примесях влияет на электрон-электронное взаимодействие. Мы находим, что, с одной стороны, неупругое рассеяние на магнитных примесях модифицирует поправку Альтшулера-Аронова, а с другой стороны, электрон-электронное взаимодействие влияет на поправку к проводимости, обусловленную неупругим рассеянием на магнитных примесях (которая также существует при отсутствии электрон-электронного взаимодействия).

Как известно, упомянутые выше эффекты слабой локализации можно рассматривать как предвестников режима сильной локализации. Сильная локализация неизбежна в 1- или 2-мерных образцах с размерами, превышающими длину свободного пробега ($L > l$), в случае отсутствия процессов сбоя фазы из-за взаимодействий или неупругого рассеяния. В случае отсутствия электрон-электронных взаимодействий обычными величинами, исследуемыми в этом контексте, являются моменты одночастичной волновой функции, усредненные по беспорядку. В точке перехода наблюдается нетривиальный полиномиальный скейлинг с размером системы [95, 26], называемый мультифрактальностью. Следствием мультифрактальности волновых функций является следующий скейлинг моментов локальной плотности состояний (LDOS) с размером системы L :

$$\frac{\langle \rho^q(E, \mathbf{r}) \rangle_{\text{dis}}}{\langle \rho(E, \mathbf{r}) \rangle_{\text{dis}}^q} \propto L^{-\Delta_q}, \quad (2)$$

где критический индекс $\Delta_q \leq 0$ является нелинейной функцией неотрицательного целого q . Как правило, соотношения типа Ур. (2) страдают от наличия сублидирующих поправок. Моменты LDOS примечательны отсутствием таких поправок к скейлингу (2). Фактически, существует гораздо больше корреляционных функций, которые на переходе Андерсона демонстрируют чистый скейлинг, похожий на Eq. (2) с отрицательными критическими экспонентами [42]. Недавно был предложен рецепт построения таких наблюдаемых с чистым скейлингом из усредненных по беспорядку комбинаций электронных волновых функций (или, альтернативно, одночастичных функций Грина) в различных пространственных точках [38].

Теоретическую основу для описания перехода Андерсона обеспечивает нелинейная сигма-модель (NLSM) [94]. В рамках подхода NLSM критические индексы Δ_q определяются аномальными размерами некоторых операторов чистого скейлинга без пространственных производных. Набор всех таких операторов с чистым скейлингом (с отрицательными и положительными критическими экспонентами) был найден с помощью теоретико-группового анализа многообразия NLSM [42]. Примечательно, что в статье Ref. [38] доказаны точные соотношения симметрии между критическими индексами этих операторов чистого скейлинга.

Вышеупомянутый прогресс в понимании мультифрактального поведения волновых функций электронов был достигнут для переходов Андерсона в отсутствие взаимодействий. Переходы металл-изолятор могут происходить при наличии беспорядка и электронно-электронного взаимодействия [58, 32, 25]. В этом случае они обычно называются переходами Мотта-Андерсона (см. обзор [34, 17]). Обычно не только кулоновское, но даже короткодействующее электрон-электронное взаимодействие является релевантным возмущением в смысле ренормализационной группы (RG) для невзаимодействующей фиксированной точки, описывающей переход Андерсона. Тогда переход Мотта-Андерсона соответствует взаимодействующей неподвижной точке, для которой, как правило, набор критических индексов отличается от набора для невзаимодействующего случая.

До недавнего времени судьба мультифрактальности на переходах Мотт-Андерсона не была известна. В статьях [22, 24, 23], в рамках анализа NLSM в размерности $d = 2 + \epsilon$ было показано, что скейлинг LDOS (2) существует при переходах металл-изолятор в присутствии кулоновского взаимодействия. В соответствии с общими ожиданиями критические индексы Δ_q отличаются от их значений для невзаимодействующей фиксированной точки. Подчеркнем, что

выживание мультифрактальности в LDOS в случае кулоновского взаимодействия априори не очевидно из-за так называемой zero-bias anomaly, т.е. сильного подавления усредненной по беспорядку LDOS на энергии Ферми [8, 10, 9, 30, 80]. Утверждение в статьях [22, 24, 23] о существовании мультифрактальности LDOS в присутствии кулоновского взаимодействия согласуется с более ранним численным анализом в рамках теории функционала плотности (DFT) [40, 41], а также с моделированием Хартри-Фока задачи [11]. Рассмотрение в статьях [22, 24, 23] ограничивалось моментами LDOS, которые, как было показано, соответствуют операторам чистого скейлинга Финкельштейновской NLSM. Таким образом, в главе 3 мы рассмотрим более общий вопрос: *каковы операторы чистого скейлинга Финкельштейновской NLSM, описывающие мезоскопические флуктуации одночастичной функции Грина на переходе Мотта-Андерсона?*

Структура диссертации

В главе 1 мы исследуем рассеяние электронов на квантовой точке. Для простоты мы моделируем электронную каплю квантовой точкой, описываемую так называемым универсальным гамильтонианом [52] с большой зарядовой энергией (E_c) и ферромагнитным обменным взаимодействием ($J > 0$). Мы предполагаем, что квантовая точка слабо связана туннельным образом с электронами, участвующими в транспорте. Для квантовой точки мы концентрируемся на режиме сильной кулоновской блокады, $E_c \gg T$, с целым числом электронов на квантовой точке. В этом режиме ведущий вклад в рассеяние электронов на квантовой точке соответствует четвертому порядку по амплитудам туннелирования. Это аналогично режиму котуннелирования при стандартном анализе переноса через квантовую точку с сильной кулоновской блокадой. Мы сравниваем два разных случая обменного взаимодействия в квантовой точке: взаимодействие Гейзенберга и Изинга. В первом случае суммарный спин квантовой точки в основном состоянии можно оценить как $S \approx J/[2(\delta - J)]$, где δ обозначает среднее расстояние между одночастичными уровнями в квантовой точке [52]. Вблизи макроскопической неустойчивости Стоунера, $\delta - J \ll \delta, J$, общий спин квантовой точки большой $S \gg 1$. Для изинговского обмена суммарный спин в основном состоянии равен нулю для $J < \delta$, т.е. мезоскопическая стоунеровская неустойчивость отсутствует [52].

В общем, неупругое сечение рассеяния состоит из трех членов: упругого спин-флипа (переворота спина), неупругого спин-флипа и

неупругого вклада без спин-флипа. В данной главе мы сосредоточимся на случае сильного обменного взаимодействия: квантовая точка близка к мезоскопической неустойчивости Стоунера, $\delta - J \ll \delta$, и низких температур $T \lesssim \delta - J$. Мы находим, что для малой энергии налетающего электрона, $\varepsilon \ll \delta$:

- (i) вклад упругого спин-флипа такой же, как и для случая магнитной примеси со спином $S \approx J/[2(\delta - J)] \gg 1$;
- (ii) при энергиях $\varepsilon \gtrsim \delta - J$ становятся активными неупругие каналы спин-флип и без спин-флипа; они добавляют вклад, который составляет в $1/S^2 \sim (1 - J/\delta)^2$ раз меньше, чем вклад упругого спин-флипа.

Наличие большого по сравнению с температурой расщепления Зеемана подавляет вклад упругого спин-флипа за счет разрушения мезоскопической фазы Стоунера [21]. Мы получаем, что неупругое сечение исчезает для энергий $|\varepsilon| \lesssim \delta - J$. При более высоких энергиях $\delta - J \lesssim |\varepsilon| \ll \delta$, неупругое сечение достигает значения порядка вклада упругого спин-флипа (без магнитного поля) для магнитной примеси со спином $1/2$. В случае обменного взаимодействия Изинга мы находим, что неупругое сечение при энергиях $|\varepsilon| \lesssim \delta - J$ чувствительно к четности числа электронов в квантовой точке: для нечетного числа электронов имеется вклад упругого спина-флипа, подобный случаю магнитной примеси со спином $1/2$. Неожиданно, но получается, что при энергиях $\delta - J \lesssim |\varepsilon| \ll \delta$ неупругое сечение становится почти нечувствительным к четности числа электронов.

Во второй главе мы изучаем квантовые поправки к проводимости двумерной неупорядоченной взаимодействующей электронной системы из-за неупругого рассеяния на магнитных примесях при наличии короткодействующего потенциального рассеяния в диффузионном режиме. Мы предполагаем наличие слабого спин-флип рассеяния, обусловленного обменным взаимодействием редких магнитных примесей с электронами. Мы не предполагаем корреляций между редкими магнитными примесями. Основным результатом главы 2 является то, что только за счет виртуального неупругого рассеяния на магнитных примесях может существовать поправка к проводимости типа Альтшулера-Ааронова. Точнее, в отличие от предыдущих работ, (i) мы рассматриваем случай различных g -факторов для электронов и магнитных примесей, $|g_e| \ll |g_i|$; (ii) мы фокусируемся на промежуточном диапазоне температур $|g_e|\mu_B H \ll T \ll |g_i|\mu_B H$; (iii) мы учитывали взаимодействие электронов и электронов в канале

"частица-дырка". Мы обнаружили, что в рамках приближения Борна неупругое рассеяние на магнитных примесях приводит к дополнительной температурозависимой поправке к проводимости. Кроме того, неупругое рассеяние модифицирует поправки Альтшулера-Аронова к проводимости. Наши предсказания представляют гипотезу для проверки в экспериментальных исследованиях низкотемпературного транспорта в электронно-неупорядоченных системах с редкими магнитными примесями.

В главе 3 мы исследуем собственные операторы ренорм-группы Финкельштейновской NLSM со взаимодействием. Неожиданно было обнаружено, что эти операторы чистого скейлинга NLSM Финкельштейна могут быть построены путем прямого обобщения операторов чистого скейлинга без производных, известных для невзаимодействующих NLSM. Эти операторы чистого скейлинга описывают мезоскопические флуктуации одночастичной функции Грина и локальной плотности состояний в присутствии электрон-электронного взаимодействия. Мы определили аномальные размерности таких операторов в теории со взаимодействием в двух-петлевом приближении. Показано, что они модифицируются из-за присутствия взаимодействия. Подобно невзаимодействующему случаю, примерно половина из этих операторов чистого скейлинга демонстрируют мультифрактальное поведение.

Глава 1

Неупругое рассеяние электронов на квантовой точке

В этой главе мы исследуем сечение неупругого рассеяния электронов на металлической квантовой точке, близкой к неустойчивости Стоунера. Мы сосредоточимся на режиме сильной кулоновской блокады, в которой в сечении рассеяния доминируют процессы котуннелирования. Для достаточно большого обменного взаимодействия квантовая точка приобретает конечный полный спин в основном состоянии. В этом, так называемом режиме мезоскопической неустойчивости Стонера, мы находим, что при достаточно низких температурах неупругое сечение рассеяния (включая вклад, обусловленный упругим переворотом спина электрона) для электрона с энергией, близкой к химическому потенциалу, отличается от случая магнитной примеси с тем же самым спином. Это различие вытекает из (i) наличия низколежащих состояний многих тел квантовой точки и (ii) корреляций амплитуд туннелирования. Наши результаты дают возможное объяснение отсутствию насыщения скорости дефазинга при низких температурах в недавнем эксперименте [87], в котором, как утверждает авторы, было показано существование локальных спиновых капель в неупорядоченной электронной жидкости.

1.1 Мотивация

Рассеяние электронов на магнитных примесях существенно влияет на свойства электронных систем при низких температурах. Самой простой моделью магнитной примеси является случайный вектор

фиксированной длины, равный S . Хотя эта модель игнорирует квантовую природу спина, она достаточна, чтобы можно было получить интересные нетривиальные эффекты, например, подавление температуры сверхпроводящего перехода за счет упругого спина-флипа [2]. Обычно это классическое приближение не подходит для описания магнитных атомов в реальных системах, так как их спин невелик, $S \sim 1$. Важно, что квантовые эффекты в динамике спина могут сделать электронное рассеяние на магнитной примеси неупругим. Например, расщепление Зеемана делает спин-флип рассеяние зависимым от энергии и подавляет его за счет поляризации спина вдоль магнитного поля [91]. Другим известным квантовым эффектом является ренормализация Кондо обменного взаимодействия между спином электрона и спином примеси, что приводит к немонотонной температурной зависимости удельного сопротивления (обзор см. [1]).

Результат взаимодействия электронов с магнитной примесью можно удобно сформулировать в терминах сечения рассеяния. Например, особенность проблемы Кондо можно увидеть в немонотонном поведении сечения неупругого рассеяния с энергией при нулевой температуре [101]. Эта немонотонность переходит в немонотонную температурную зависимость скорости электронного дефазинга из-за редких магнитных примесей. Вклад в скорость электронного дефазинга, обусловленный неупругим рассеянием на магнитных примесях, влияет на зависимость поправки слабой локализации от температуры и магнитного поля [91, 60, 19, 61, 45].

В реальных материалах с кулоновским взаимодействием магнитная примесь со спином $1/2$ может быть образована электроном, занимающим локализованный уровень [78]. Магнитная примесь со спином $S > 1/2$ может быть имитирована ловушкой, в которой локализовано много электронов. Недавно такие электронные капли со спином $S \approx 2$ (на каплю) были обнаружены в двумерной (2D) электронной системе в Si-MOSFET посредством термодинамических измерений намагниченности образца [73, 87]. При наличии сильного обменного взаимодействия в двумерной неупорядоченной электронной системе при низких температурах спин электронной капли может быть конечным из-за явления мезоскопической неустойчивости Стонера [52],[65]. Конечный спин электронной капли дает поведение спиновой восприимчивости типа Кюри. Температурная зависимость измеренной намагниченности согласуется с законом Кюри для спиновой восприимчивости одной капли при условии, что их концентрация обратно пропорциональна температуре [73, 87]. Имея в виду эти эксперименты, мы исследуем влияние таких многоэлектронных капель (квантовых точек) с конечным

спином на транспортные свойства 2D электронной системы.

1.2 Формализм

Начнем со следующего гамильтониана

$$H = H_{QD} + H_R + H_T. \quad (1.1)$$

Здесь первый член H_{QD} описывает электроны в квантовой точке. Мы рассматриваем металлическую квантовую точку, т.е. с большой безразмерной проводимостью, $g_{\text{Th}} = E_{\text{Th}}/\delta \gg 1$, где E_{Th} обозначает энергию Таулесса. В данном случае квантовая точка точно описывается так называемым универсальным гамильтонном [52],[3]:

$$H_{QD} = \sum_{\alpha,\sigma} \epsilon_{\alpha\sigma} d_{\alpha\sigma}^\dagger d_{\alpha\sigma} + E_c(\hat{n} - N_0)^2 - JS^2. \quad (1.2)$$

Здесь $d_{\alpha\sigma}$ и $d_{\alpha\sigma}^\dagger$ - операторы уничтожения и рождения электронов с энергией $\epsilon_{\alpha\sigma} = \epsilon_\alpha + \mu_B g_L B \sigma / 2$ в квантовой точке, где $\sigma = \pm 1$ обозначает спиновый индекс, g_L и μ_B - электронный g-фактор и магнетон Бора соответственно. Второй член в правой части Ур. (1.2) учитывает кулоновскую блокаду. В нем задействован оператор числа частиц,

$$\hat{n} = \sum_{\sigma} \hat{n}_{\sigma} = \sum_{\alpha} \hat{n}_{\alpha} = \sum_{\alpha,\sigma} d_{\alpha\sigma}^\dagger d_{\alpha\sigma} \quad (1.3)$$

и внешний заряд N_0 . Последний термин в правой части Ур. (1.2) описывает ферромагнитное взаимодействие Гейзенберга ($J > 0$). Оно выражается через оператор полного спина на квантовой точке,

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \mathbf{s}_{\alpha} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\sigma,\sigma'} d_{\alpha\sigma}^\dagger \boldsymbol{\sigma}_{\sigma\sigma'} d_{\alpha\sigma}. \quad (1.4)$$

Здесь мы не рассматриваем взаимодействие в куперовском канале, которое отвечает за сверхпроводящие корреляции в квантовых точках [75, 99, 100, 77, 76, 90, 5, 66, 67].

Далее, член H_R описывает электроны в резервуаре. Для простоты мы пренебрегаем взаимодействием электронов в резервуаре и записываем гамильтониан как

$$H_R = \sum_{k,\sigma} \epsilon_{k\sigma} a_{k\sigma}^\dagger a_{k\sigma}. \quad (1.5)$$

Здесь $a_{\alpha\sigma}^\dagger$ и $a_{\alpha\sigma}$ - операторы рождения и уничтожения электронов с энергией $\varepsilon_{k\sigma} = \varepsilon(k) + \mu_B \tilde{g}_L B\sigma/2$ в резервуаре, где \tilde{g}_L обозначает g-фактор в резервуаре. Мы отмечаем, что все энергии отсчитываются от химического потенциала.

Наконец, термин H_T учитывает связь между квантовой точкой и резервуаром. Мы выбираем его в стандартном виде туннельного гамильтониана:

$$H_T = \sum_{\alpha,\sigma,k} t_{\alpha k} d_{\alpha\sigma}^\dagger a_{k\sigma} + h.c. \quad (1.6)$$

Подчеркнем, что при туннелировании из квантовой точки в резервуар или наоборот не происходит спин-флип электрона. Далее мы пренебрегаем влиянием электронов в резервуаре на динамику полного спина квантовой точки (см. ссылки [81, 82]).

Согласно статье [19], Т-матрица рассеяния электронов из состояния $|\mathbf{k}\sigma\rangle$ с энергией $\varepsilon = \varepsilon_{k,\sigma}$ в состояние $|\mathbf{k}'\sigma'\rangle$ может быть написана в терминах функций Грина:

$$\langle \mathbf{k}'\sigma' | \mathcal{T} | \mathbf{k}\sigma \rangle = - \left[\underline{\mathcal{G}}_{k'\sigma'}^{(0)}(\varepsilon) \right]^{-1} \underline{\mathcal{G}}_{k'\sigma';k\sigma}^A(\varepsilon) \left[\underline{\mathcal{G}}_{k\sigma}^{(0)}(\varepsilon) \right]^{-1}. \quad (1.7)$$

где $\underline{\mathcal{G}}^{(0)}$ и $\underline{\mathcal{G}}$ - свободная и полная многочастичная функции Грина для электронов в резервуаре, соответственно. Используя уравнение Дайсона для опережающей функции Грина $\underline{\mathcal{G}}^A$, Ур. (1.7) можно переписать следующим образом

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k}'\sigma' | \mathcal{T} | \mathbf{k}\sigma \rangle &= - \delta_{\mathbf{k}',\mathbf{k}} \delta_{\sigma',\sigma} \left[\underline{\mathcal{G}}_{k\sigma}^{(0)}(\varepsilon) \right]^{-1} \\ &\quad - \sum_{\alpha\beta} \bar{t}_{k'\beta} \mathcal{G}_{\beta\sigma';\alpha\sigma}^A(\varepsilon) t_{\alpha k}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Здесь $\mathcal{G}_{\beta\sigma';\alpha\sigma}^A(\varepsilon)$ - точная опережающая функция Грина для электронов в квантовой точке и знак черта означает комплексное сопряжение. Соответствующая мацубаровская функция Грина $\mathcal{G}_{\beta\sigma';\alpha\sigma}^A(i\varepsilon)$ может быть получена в мнимом времени следующим образом (см., например, ссылку [56]):

$$\mathcal{G}_{\alpha\sigma;\beta\sigma'}(\tau) = -\frac{1}{\mathcal{Z}} \text{Tr} \left[e^{-\tau H} d_{\beta\sigma'}^\dagger e^{-(\beta-\tau)H} d_{\alpha\sigma} \right], \quad (1.9)$$

где $\tau > 0$, $\beta = 1/T$ и $\mathcal{Z} = \text{Tr} e^{-\beta H}$ означает статсумму. Общее сечение рассеяния для электрона в состоянии $|\mathbf{k}\sigma\rangle$ связано с Т-матрицей как [19].

$$\sigma_{\text{tot}}^\sigma = \frac{2}{v_F} \text{Im} \langle \mathbf{k}\sigma | \mathcal{T} | \mathbf{k}\sigma \rangle. \quad (1.10)$$

Здесь v_F - это скорость электронов в резервуаре на уровне Ферми. В нашей задаче рассеяния электронов на квантовой точке удобнее исследовать следующую величину

$$\mathcal{A}_{\text{tot}}^\sigma(\varepsilon) = \sum_k \delta(\varepsilon - \varepsilon_{k\sigma}) \text{Im} \langle \mathbf{k}\sigma | \mathcal{T} | \mathbf{k}\sigma \rangle, \quad (1.11)$$

которая представляет собой сечение рассеяния, усредненное с одночастичной плотностью состояний в резервуаре. Используя Ур. (1.8), можно выразить величину $\mathcal{A}_{\text{tot}}^\sigma(\varepsilon)$ как

$$\mathcal{A}_{\text{tot}}^\sigma(\varepsilon) = \text{Im} \sum_{\alpha\beta} Q_{\beta\alpha}^\sigma(\varepsilon) \mathcal{G}_{\alpha\sigma;\beta\sigma}^A(\varepsilon). \quad (1.12)$$

Здесь мы вводим матрицу

$$Q_{\alpha\beta}^\sigma(\varepsilon) = \sum_k \delta(\varepsilon - \varepsilon_{k\sigma}) t_{\alpha k} \bar{t}_{k\beta}. \quad (1.13)$$

Эта матрица характеризует туннельный контакт следующим образом. Определим матрицу $\hat{g}_{\alpha\beta} = (4\pi^2/\delta) \sum_\sigma Q_{\alpha\beta}^\sigma(\varepsilon)$. Затем для электрона с энергией ε эффективное количество открытых туннельных каналов N_{ch} и действительный безразмерный (в единицах e^2/h) кондактанс канала g_{ch} могут быть записаны как

$$N_{\text{ch}} = \frac{(\text{tr} \hat{g})^2}{\text{tr} \hat{g}^2}, \quad g_{\text{ch}} = \frac{\text{tr} \hat{g}^2}{\text{tr} \hat{g}} \text{tr} \hat{g}. \quad (1.14)$$

Мы предполагаем, что общая проводимость туннельного контакта мала, $g_T = g_{\text{ch}} N_{\text{ch}} = \text{tr} \hat{g} \ll 1$.

Подчеркнем, что Т-матрица, полученная в соответствии с Ур. (1.12), усредняется по равновесной матрице плотности квантовой точки и резервуара. В частности, это усреднение включает суммирование по начальным состояниям квантовой точки с весом Гиббса. Следовательно, стандартное выражение для упругого рассеяния $\sigma_{\text{el}} \propto |\langle \mathbf{k}'\sigma | \mathcal{T} | \mathbf{k}\sigma \rangle|^2$, где $\varepsilon_{k\sigma} = \varepsilon_{k'\sigma}$ неприменимо для нашего определения Т-матрицы. В дальнейшем мы извлечем неупругую часть сечения непосредственно из конечного выражения для общего сечения (см. гл. 1.5).

1.3 Сечение рассеяния в режиме котуннелирования

В самом низком порядке по $Q_{\alpha\beta}^\sigma(\varepsilon)$ сечение рассеяния определяется функцией Грина электронов на изолированной квантовой точке, т.е.

функцией Грина, соответствующей гамильтониану H_{QD} . Затем, если величины $Q_{\alpha\beta}^{\sigma}(\varepsilon)$ вещественны, сечение рассеяния определяется туннельной плотностью состояний для изолированной квантовой точки. В случае кулоновской долины это подразумевает экспоненциально малое рассеивающее сечение при низких энергиях $|\varepsilon| < E_c$.

Для расчета сечения рассеяния в четвёртом порядке по амплитудам туннелирования мы представим базис точных многочастичных собственных состояний $|i\rangle$ для гамильтониана (1.2) изолированной квантовой точки: $H_{QD}|i\rangle = E_i|i\rangle$. Затем вычисляя функцию Грина электронов на квантовой точке во втором порядке по туннелированию (см. Приложение 4.1), мы находим следующий результат для полного сечения рассеяния:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\text{tot}}^{\sigma}(\varepsilon) &= \pi[1 + e^{-\beta\varepsilon}] \sum_{\alpha\beta\gamma\eta} \sum_{i,f,\sigma'} p_i \int d\varepsilon' \frac{Q_{\beta\alpha}^{\sigma}(\varepsilon)Q_{\gamma\eta}^{\sigma'}(\varepsilon')}{1 + e^{-\beta\varepsilon'}} \\ &\times \langle i|d_{\gamma\sigma'}^{\dagger} \frac{1}{\varepsilon' - E_i + H_{QD}} d_{\alpha\sigma} + d_{\alpha\sigma} \frac{1}{\varepsilon + E_i - H_{QD}} d_{\gamma\sigma'}^{\dagger} |f\rangle \\ &\times \langle f|d_{\beta\sigma}^{\dagger} \frac{1}{\varepsilon' - E_i + H_{QD}} d_{\eta\sigma'} + d_{\eta\sigma'} \frac{1}{\varepsilon + E_i - H_{QD}} d_{\beta\sigma}^{\dagger} |i\rangle \\ &\times \delta(\varepsilon + E_i - E_f - \varepsilon'). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Здесь $p_i = \exp(-\beta E_i)/Z$, где $Z = \sum_i \exp(-\beta E_i)$, является вероятностью Гиббса для начальных состояний квантовой точки. Отметим, что результат (1.15) можно получить и в рамках подхода обобщенного золотого правила Ферми для T-матрицы (см. приложение 4.2). Как уже говорилось выше, нас интересует только неупругое рассеяние, а значит, мы всегда будем рассматривать различные начальное и конечное состояния квантовой точки, $i \neq f$. Далее мы пренебрегаем возможной зависимостью $Q_{\beta\alpha}^{\sigma}$ от спинового индекса σ .

1.4 Квантовая точка с одним уровнем

Для иллюстрации общего выражения (1.15) для сечения рассеяния мы рассмотрим простой пример одноуровневой квантовой точки. В данном случае существует четыре состояния точки: состояние без электронов, $|0\rangle$, два состояния с одним электроном, $|\uparrow\rangle$ и $|\downarrow\rangle$, и состояние с двумя электронами с противоположными спинами, $|\uparrow\downarrow\rangle$. Отметим, что хотя описание в терминах универсального гамильтониана (1.2) не применимо для одноуровневой квантовой точки, общее выражение

(1.15), написанное в терминах точных многочастичных собственных состояний, корректно. Далее, мы находим из Ур. (1.15)

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\text{tot}}^{\sigma}(\varepsilon) &= \pi Q^2(\varepsilon) \left[\frac{p_0 + p_{\sigma}}{(\varepsilon + E_0 - E_{\sigma})^2} + \frac{p_{\bar{\sigma}} + p_{\uparrow\downarrow}}{(\varepsilon + E_{\bar{\sigma}} - E_{\uparrow\downarrow})^2} \right] \\ &\quad + \pi Q(\varepsilon) Q(\varepsilon + E_{\sigma} - E_{\bar{\sigma}}) \frac{1 + e^{-\beta\varepsilon}}{1 + e^{-\beta(\varepsilon + E_{\sigma} - E_{\bar{\sigma}})}} \\ &\quad \times p_{\sigma} \left[\frac{1}{E_{\bar{\sigma}} - E_0 - \varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon + E_{\sigma} - E_{\uparrow\downarrow}} \right]^2. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Здесь $\sigma = \uparrow, \downarrow$ и $\bar{\sigma} = \downarrow, \uparrow$, соответственно. Первый термин в правой части Ур. (1.16) описывает упругий спин-флип электрона с энергией ε и проекцию спина σ после рассеяния на одноуровневой квантовой точке. Второй член соответствует рассеянию со спин-флипом. В отсутствие магнитного поля два состояния с одним электроном имеют одинаковую энергию, $E_{\uparrow} = E_{\downarrow}$, а результат (1.16) совпадает с результатом статей [50, 51] для полной вероятности прохождения. При наличии магнитного поля состояния со спинами вверх и вниз не эквивалентны, $E_{\uparrow} \neq E_{\downarrow}$, и рассеяние со спин-флипом становится неупругим. При отсутствии взаимодействия энергия состояния с двумя электронами выражается энергией состояний с одним и нулевым электроном, $E_{\uparrow\downarrow} = E_{\uparrow} + E_{\downarrow} - E_0$. Тогда исчезает член со спин-флипом в сечении рассеяния (1.16). Упругий вклад становится независимым от температуры. В согласии с работами [50, 51], рассеяние электронов на одноуровневой квантовой точке становится полностью когерентным.

Для $E_0, E_{\uparrow\downarrow} \rightarrow \infty$ одноуровневая квантовая точка может быть занята только одним электроном, т.е. квантовая точка ведет себя как спин 1/2. В этом случае спин-флип неупругая часть Ур. (1.16) сводится к следующему выражению:

$$\mathcal{A}_{\text{inel,sf}}^{\sigma}(\varepsilon) = \pi \nu^2 J_s^2 \left[\bar{p}_{\downarrow} [1 - n_F(\varepsilon + \omega_{\sigma})] + \bar{p}_{\uparrow} n_F(\varepsilon + \omega_{\sigma}) \right]. \quad (1.17)$$

Здесь $\omega_{\sigma} = E_{\sigma} - E_{\bar{\sigma}}$, $n_F(\varepsilon) = 1/[1 + \exp(\beta\varepsilon)]$ - это функция распределения Ферми-Дирака, а $\bar{p}_{\sigma} = n_F(\omega_{\sigma})$ - это вероятность состояния с проекцией спина σ . Игнорируя зависимость амплитуд туннелирования в Q от энергии, можно записать эффективную обменную связь между спином электронов в резервуаре и спином электронов в квантовой точке как $J_s = \nu^{-1} Q [1/E_0 + 1/E_{\uparrow\downarrow}]$, где ν - это средняя плотность состояний на одну проекцию спина на уровне Ферми для электронов в резервуаре.

Если мы предположим, что существует много таких квантовых точек (спиновые примеси $1/2$) с концентрацией n_s и определим частоту процессов спин-флипа для электрона в резервуаре как $(2n_s/\nu)\mathcal{A}_{\text{inel,sf}}^\sigma(\varepsilon)$, то мы воспроизводим результат статьи[92].

1.5 Многоуровневая квантовая точка вблизи Стоунеровской неустойчивости

Теперь мы рассмотрим многоуровневую квантовую точку, описываемую универсальным гамильтонном (1.2). Напоминаем, что зарядовая энергия E_c большая, $E_c \gg T, \varepsilon, \delta, J$, а внешний заряд N_0 имеет целое значение. Тогда энергия промежуточных состояний в правой части Ур. (1.15) равна зарядовой энергии, $H_{QD} - E_i = E_c$. Опуская упругий вклад, т.е. член с $|i\rangle = |f\rangle$, из Ур. (1.15), и используя коммутационное отношение $[d_{\alpha\sigma}^\dagger, d_{\beta\sigma'}] = \delta_{\alpha\beta}\delta_{\sigma\sigma'} - 2d_{\beta\sigma'}d_{\alpha\sigma}^\dagger$, мы переписываем неупругий вклад в сечение рассеяния как

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\text{inel}}^\sigma(\varepsilon) &= \frac{4\pi}{E_c^2} \sum_{\alpha,\gamma} \sum_{f \neq i, \sigma'} Q_{\gamma\alpha}(\varepsilon) Q_{\alpha\gamma}(\varepsilon + E_i - E_f) \\ &\times \frac{p_i [1 + e^{-\beta\varepsilon}]}{1 + e^{-\beta(\varepsilon + E_i - E_f)}} \langle i | d_{\alpha\sigma}^\dagger d_{\alpha\sigma} | f \rangle \langle f | d_{\gamma\sigma}^\dagger d_{\gamma\sigma'} | i \rangle \\ &+ \frac{4\pi}{E_c^2} \sum_{\alpha \neq \gamma} \sum_{f \neq i, \sigma'} Q_{\alpha\alpha}(\varepsilon) Q_{\gamma\gamma}(\varepsilon + E_i - E_f) \\ &\times \frac{p_i [1 + e^{-\beta\varepsilon}]}{1 + e^{-\beta(\varepsilon + E_i - E_f)}} \langle i | d_{\gamma\sigma'}^\dagger d_{\alpha\sigma} | f \rangle \langle f | d_{\alpha\sigma}^\dagger d_{\gamma\sigma'} | i \rangle \end{aligned} \quad (1.18)$$

Здесь мы принимаем во внимание, что начальное и конечное состояния квантовой точки имеют одинаковое количество электронов.

Уравнение (1.18) является основным результатом этой главы. Мы отметим, что оно может быть применено для вычисления неупругого сечения для произвольного гамильтониана, который описывает квантовую точку при условии, что этот гамильтониан сохраняет общее число электронов N , а энергии точных состояний многих тел с N и $N \pm 1$ различаются на большое значение зарядовой энергии. Для универсального гамильтониана (1.2) матричные элементы одночастичных операторов в Ур. (1.18) можно точно рассчитать с помощью метода Вей-Нормана-Колоколова [98],[46, 47, 28, 27, 48], который недавно использовался для точной оценки спиновой восприимчивости и туннельной плотности состояний [20],[21]. Поскольку

в этой работе нас интересуют низкие температуры, $T \ll \delta$ и низкие энергии налетающего электрона, $|\varepsilon| \ll \delta$, то можно применить простой подход с коэффициентами Клебша-Гордана, используемыми для описания проводимости [89],[6] и дробового шума [84] через квантовую точку с обменным взаимодействием Гейзенберга при низких температурах.

В общем случае амплитуды туннелирования $t_{\alpha k}$ являются случайными величинами, обусловленными случайным поведением электронных волновых функций в квантовой точке. Далее нас интересует случай, когда энергии электрона до (ε) и после ($\varepsilon' = \varepsilon + E_i - E_f$) рассеяния малы по сравнению с энергией Ферми электронов в резервуаре. Таким образом, мы можем пренебречь энергетической зависимостью в величинах $Q_{\alpha\gamma}$. Для металлической квантовой точки, $g_{\text{Th}} \gg 1$, усреднение амплитуд туннелирования по реализациям беспорядка может выполняться независимо от уровней энергии отдельных частиц ϵ_α . Используя следующие соотношения (мы предполагаем, что $Q_{\alpha\beta} \propto \phi_\alpha \bar{\phi}_\beta$, где ϕ_α случайный вектор с гауссовым распределением, удовлетворяющий следующим соотношениям: $\langle \phi_\alpha \bar{\phi}_\beta \rangle = Q\delta_{\alpha\beta}$ и $\langle \phi_\alpha \phi_\beta \rangle = (2/\beta - 1)Q\delta_{\alpha\beta}$.)

$$\overline{Q_{\alpha\gamma}Q_{\gamma\alpha}} = \begin{cases} Q^2, & \alpha \neq \gamma, \\ (2/\beta)Q^2, & \alpha = \gamma, \end{cases} \quad (1.19)$$

и

$$\overline{Q_{\alpha\alpha}Q_{\gamma\gamma}} = Q^2, \quad \alpha \neq \gamma, \quad (1.20)$$

где параметр $\beta = 1$ и 2 для ортогонального класса AI и унитарного класса A, соответственно. Тогда после усреднения Ур. (1.18) по беспорядку получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\text{inel}}^\sigma(\varepsilon) = & \frac{4\pi Q^2}{E_c^2} \sum_{f \neq i} \frac{p_i [1 + e^{-\beta\varepsilon}]}{1 + e^{-\beta(\varepsilon + E_i - E_f)}} \left\{ |\langle i | S^{-\sigma} | f \rangle|^2 \right. \\ & + \left(\frac{2}{\beta} - 1 \right) \sum_{\alpha, \sigma'} |\langle i | d_{\alpha\sigma}^\dagger d_{\alpha\sigma} | f \rangle|^2 \\ & \left. + \sum_{\alpha \neq \gamma, \sigma'} |\langle i | d_{\gamma\sigma}^\dagger d_{\alpha\sigma} | f \rangle|^2 \right\}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

где $S^{-\sigma} = S_x - i\sigma S_y$, $\sigma = \pm$ и S_x, S_y являются операторами полного спина точки. Здесь учитывается, что оператор \hat{n}_σ не изменяет многочастичное состояние, а состояния $|i\rangle$ и $|f\rangle$ отличаются, $\langle i | \hat{n}_\sigma | f \rangle =$

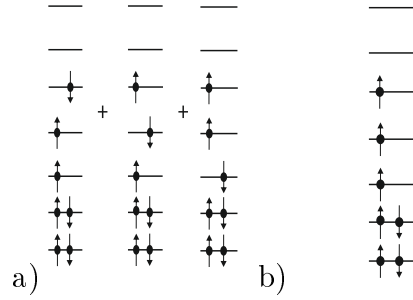


Figure 1.1: Примеры низколежащих собственных состояний с полным спином $S = 3/2$: а) $S_z = 1/2$ и б) $S_z = 3/2$.

0. Первая строка в Ур. (1.21) соответствует вкладу в сечение рассеяния за счет вращения суммарного спина квантовой точки как целого, т.е. суммарный спин в начальном и конечном состояниях одинаковы. Другие члены в уравнении (1.21) возникают потому, что в случае квантовой точки полный спин состоит из спинов отдельных электронов, занимающих одночастичные уровни. Эти дополнительные вклады увеличивают неупругое сечение рассеяния на квантовой точке по сравнению со случаем магнитной примеси с тем же значением спина.

Рассмотрим случай электрона с большой энергией, $\varepsilon \gg E_f, E_i, T$. Тогда сечение неупругого рассеяния становится

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{\text{inel}}^\sigma &= \frac{4\pi Q^2}{E_c^2} \sum_i p_i \langle i | S(S+1) - S_z^2 - \sigma S_z \\
&+ \left(\frac{2}{\beta} - 1 \right) \sum_\alpha \left[\hat{n}_{\alpha\bar{\sigma}}(1 - \hat{n}_{\alpha\sigma}) + \hat{n}_{\alpha\sigma}(1 - \langle i | \hat{n}_{\alpha\sigma} | i \rangle) \right] \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{\gamma \neq \alpha} \hat{n}_\gamma (2 - \hat{n}_\alpha) | i \rangle. \tag{1.22}
\end{aligned}$$

Отметим, что последний член в уравнении (1.22) пропорционален числу K доступных одночастичных уровней. Обычно увеличение электронной энергии на δ добавляет новое конечное состояние квантовой точки, которое вносит вклад в сумму в уравнении (1.22). Тогда при нулевой температуре его можно оценить как $K \sim \varepsilon/\delta$. Предполагая, что $K \gg N_0, S$, получаем, что сечение неупругого рассеяния пропорционально энергии электронов, $\mathcal{A}_{\text{inel}}^\sigma = 4\pi Q^2 N_0 \varepsilon / E_c^2$, при $\delta N_0, \delta J / [2(\delta - J)] \ll \varepsilon \ll E_c$.

1.6 Неупругое сечение рассеяния в отсутствии магнитного поля

Теперь рассмотрим случай малых электронных энергий $\varepsilon \ll \delta, J$. Мы предполагаем, что квантовая точка находится в режиме мезоскопической Стоунеровской неустойчивости, $\delta, J \gg \delta - J$. Также мы рассматриваем случай низких температур $T \lesssim \delta - J \ll J$. Для простоты рассмотрим случай равноудаленного одночастичного спектра. Далее мы обсудим влияние флуктуаций одночастичных уровней. Минимальная энергия многочастичного состояния с суммарным спином S равна

$$E_S = (\delta - J)S^2 - JS \quad (1.23)$$

Здесь мы опускаем член, пропорциональный зарядовой энергии E_c , поскольку мы обсуждаем состояния с одинаковым количеством электронов. Эти многочастичные состояния состоят из трех групп уровней: двукратно занятых уровней внизу, однократно занятых - в середине, и пустых уровней - вверху (см. рис. 1.1). При условии, что обменное взаимодействие ограничено следующим интервалом

$$\frac{2S - 1}{2S} < J/\delta < \frac{2S + 1}{2S + 2}, \quad (1.24)$$

квантовая точка будет иметь полный спин равный S в основном состоянии. Для $\delta - J \ll \delta, J$ его значение велико, $S \approx \delta/[2(\delta - J)] \gg 1$. Интересно, что в этом режиме есть два низколежащих многочастичных возбужденных состояния, что соответствует состояниям с суммарными спинами $S + 1$ и $S - 1$. Щели $E_{\pm} = E_{S\pm 1} - E_S$ между этими возбужденными состояниями и основным состоянием намного меньше типичного расстояния между уровнями: $E_+ = (\delta - J)(2S + 1) - J \leq \delta/S$ и $E_- = -(\delta - J)(2S - 1) + J \leq \delta/(S + 1)$. Для случая большого суммарного спина, $S \gg 1$, щели E_+ и E_- малы по сравнению со средней разностью одночастичных уровней, $E_{\pm} \ll \delta$. Следующие многочастичные возбужденные состояния с суммарными спинами $S \pm 2$ имеют щели, которые заключаются в следующих интервалах, $\delta/(S + 1) \leq E_{++} \leq 3\delta/S$ и $\delta/S \leq E_{--} \leq 3\delta/(S + 1)$ (см. рис. 1.2). Предполагая, что температура $T \lesssim \delta - J$, мы пренебрегаем ими.

Оператор $d_{\gamma\sigma}^\dagger d_{\alpha\sigma}$ с $\alpha \neq \gamma$ имеет ненулевые матричные элементы между многочастичными состояниями с одинаковой или измененной на 1 проекцией спина. Рассмотрим основное состояние с суммарным спином S и проекцией M . Состояние $d_{\gamma\sigma}^\dagger d_{\alpha\sigma}|S, M\rangle$ будет иметь энергию равную E_{S+1} , если уровень α является самым высоким из двух занятых,

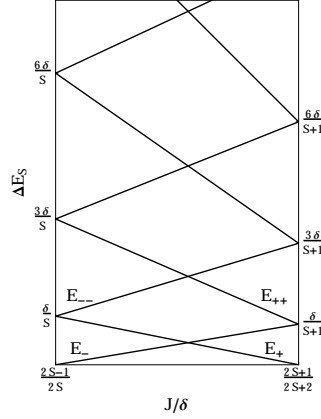


Figure 1.2: Энергии низколежащих многочастичных собственных состояний (1.23) как функции J/δ для случая, когда суммарный спин в основном состоянии равен S . Энергия основного состояния E_S принята равной нулю.

а уровень γ - самым низким пустым (см. рис. 1.3). Оператор $d_{\alpha\bar{\sigma}}^\dagger d_{\alpha\sigma}$ имеет ненулевые матричные элементы между низколежащими многочастичными состояниями с одинаковым суммарным спином. В этом случае уровень α может быть любым из отдельно занятых уровней, их число равно $2S$. Соответствующие элементы матрицы можно вычислить стандартным способом с помощью коэффициентов Клебша-Гордана (см., например, ссылку [53]). Необходимые матричные элементы приведены в таблице 1.1. Тогда для $T \lesssim \delta - J$ и $|\varepsilon|, \delta - J \ll \delta, J$ мы находим следующий результат для сечения неупругого рассеяния:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\text{inel}}^\sigma(\varepsilon) = & \frac{4\pi Q^2}{E_c^2} \left\{ \frac{(2S+1)(S+1)}{3} + \frac{1}{2}F(\varepsilon, E_-) \right. \\ & \left. + \frac{2S+3}{2(2S+1)}F(\varepsilon, E_+) \right\}, \end{aligned} \quad (1.25)$$

где мы ввели функцию

$$F(\varepsilon, E) = \frac{2 \cosh^2(\beta\varepsilon/2)}{\cosh(\beta\varepsilon) + \cosh(\beta E)}. \quad (1.26)$$

Первый вклад в Ур.(1.25) представляет собой упругое спин-флип-рассеяние, следующие два соответствуют неупругому рассеянию с и без спин-флип. Отметим, что вклад в уравнение (1.25) из-за упругого спин-флип рассеяния, $(2S+1)(S+1)/3$, больше, чем результат для магнитной примеси, $2S(S+1)/3$. Это происходит за

Table 1.1: Матричные элементы между низколежащими многочастичными состояниями. Одночастичные состояния α и γ различны, $\alpha \neq \gamma$ (см. текст и рис. 1.3).

$\langle S+1, m+1 d_{\gamma\uparrow}^\dagger d_{\alpha\downarrow} S, m \rangle = \langle S+1, m+1 (S, m\rangle 1, 1\rangle) = \frac{\sqrt{(S+m+2)(S+m+1)}}{\sqrt{(2S+1)(2S+2)}}$	$\sum_{m=-S}^S \langle S+1, m+1 d_{\gamma\uparrow}^\dagger d_{\alpha\downarrow} S, m \rangle ^2 = \frac{2S+3}{3}$
$\langle S-1, m+1 d_{\gamma\uparrow}^\dagger d_{\alpha\downarrow} S, m \rangle = \langle S, m (S-1, m+1\rangle 1, -1\rangle) = \frac{\sqrt{(S-m)(S-m-1)}}{\sqrt{(2S)(2S-1)}}$	$\sum_{m=-S}^S \langle S-1, m+1 d_{\gamma\uparrow}^\dagger d_{\alpha\downarrow} S, m \rangle ^2 = \frac{2S+1}{3}$
$\langle S+1, m d_{\gamma\downarrow}^\dagger d_{\alpha\uparrow} S, m \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle S+1, m (S, m\rangle 1, 0\rangle) = \frac{\sqrt{(S+m+1)(S-m+1)}}{\sqrt{(2S+1)(2S+2)}}$	$\sum_{m=-S}^S \langle S+1, m d_{\gamma\downarrow}^\dagger d_{\alpha\uparrow} S, m \rangle ^2 = \frac{2S+3}{6}$
$\langle S-1, m d_{\gamma\downarrow}^\dagger d_{\alpha\uparrow} S, m \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle S, m (S-1, m\rangle 1, 0\rangle) = \frac{\sqrt{(S+m)(S-m)}}{\sqrt{(2S)(2S-1)}}$	$\sum_{m=-S}^S \langle S-1, m d_{\gamma\downarrow}^\dagger d_{\alpha\uparrow} S, m \rangle ^2 = \frac{2S+1}{6}$
$\langle S, m+1 d_{\alpha\uparrow}^\dagger d_{\alpha\downarrow} S, m \rangle = \frac{1}{2S} \langle S, m+1 S^+ S, m \rangle = \frac{\sqrt{(S-m)(S-m+1)}}{2S}$	$\sum_{m=-S}^S \langle S, m+1 d_{\alpha\uparrow}^\dagger d_{\alpha\downarrow} S, m \rangle ^2 = \frac{(S+1)(2S+1)}{6S}$

счет дополнительных корреляций между амплитудами туннелирования в случае ортогонального ансамбля ($\beta = 1$).

Теперь рассмотрим случай более высоких температур, $\delta \gg T \gg \delta - J$. Тогда многие низкоэнергетические возбужденные состояния с общим спином $S \pm k$ с $k \lesssim \sqrt{T/(\delta - J)}$ вносят свой вклад в неупругое сечение. Для $\delta - J \lesssim T$ суммирование по дискретным значениям k может быть заменено интегралом. Используя следующий результат,

$$\frac{\int dS (2S+1) f(S) e^{-\beta E_S}}{\int dS (2S+1) e^{-\beta E_S}} = f(S_g) + \frac{T}{\delta} f'(S_g) + \frac{T}{4(\delta - J)} f''(S_g), \quad (1.27)$$

где $S_g = J/[2(\delta - J)]$ и $f(S)$ квадратичная функция S , мы получаем неупругое сечение при $\delta \gg T \gg \delta - J$ при энергиях $|\varepsilon| \lesssim \delta$

$$\mathcal{A}_{\text{inel}}^\sigma(\varepsilon) = \frac{4\pi Q^2}{E_c^2} \left[\frac{\delta(3\delta - 2J)}{6(\delta - J)^2} + \frac{T}{3(\delta - J)} \right]. \quad (1.28)$$

Подчеркнем, что неупругое сечение больше, чем можно ожидать для случая магнитной примеси со спином порядка $\delta/[2(\delta - J)]$.

Выше мы предположили, что расстояние между соседними одночастичными уровнями в квантовой точке постоянно. В общем случае это не так. Следуя статье [21] учтем флуктуации одночастичных уровней вблизи неустойчивости Стоунера, $\delta - J \ll \delta$. Для данной реализации одночастичных уровней энергия E_+ приобретает случайную добавку ΔE_{2S} : $E_+ \rightarrow E_+ + \Delta E_{2S}$. Эта добавка обусловлена колебаниями одночастичной энергии в полосе с $2S$ уровнями в среднем. Ее можно оценить как $\Delta E_{2S} = \delta \Delta n_{2S}$, где Δn_{2S} означает флуктуацию количества

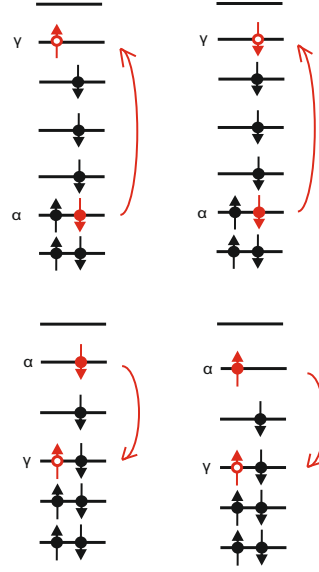


Figure 1.3: Иллюстрация неупругих переходов с (левая колонка) и без (правая колонка) спин-флипа. Общий спин увеличивается (уменьшается) на единицу при переходе в верхней (нижней) строке (см. текст).

уровней в полосе со средним числом уровней $2S$. Вблизи неустойчивости Стоунера из условия $E_+ + \Delta E_{2S} = 0$ мы получаем, что спин в основном состоянии даётся в виде

$$S = \frac{\delta}{2(\delta - J)} [1 - \Delta n_{2S}]. \quad (1.29)$$

Как хорошо известно из теории случайных матриц [59], для $S \gg 1$ флуктуации Δn_{2S} гауссовы, и

$$\overline{\Delta n_{2S}} = 0, \quad \overline{(\Delta n_{2S})^2} = \frac{2}{\beta\pi^2} (\ln 2S + \text{const}). \quad (1.30)$$

Тогда с помощью Ур. (1.29) и (1.30), для функции $f(S)$, которая квадратична согласно Ур. (1.25), мы получаем

$$\overline{f(S)} = f(\bar{S}) + \frac{\bar{S}^2}{\beta\pi^2} \ln(2\bar{S}) f''(\bar{S}), \quad (1.31)$$

где $\bar{S} = \delta/[2(\delta - J)]$. Используя Ур. (1.31) и усредняя функции $F(\varepsilon, E_+ + \delta\Delta n_{2S})$ и $F(\varepsilon, E_- - \delta\Delta n_{2S})$ в Ур. (1.25) по Δn_S с гауссовым

распределением (1.30), получим усредненное неупругое сечение при температурах $T \lesssim \delta - J$ и энергиях $\varepsilon \ll \delta$:

$$\overline{\mathcal{A}_{\text{inel}}^\sigma(\varepsilon)} = \frac{4\pi Q^2}{E_c^2} \left\{ \frac{2\delta^2}{3(\delta - J)^2} \left[1 + \frac{2}{\pi^2} \ln \frac{\delta}{\delta - J} \right] + \mathcal{F} \left(\varepsilon, 2(\delta - J), \frac{\delta}{\pi} \sqrt{2 \ln[\delta/(\delta - J)]} \right) \right\}. \quad (1.32)$$

Здесь мы пренебрегаем сублидирующими членами по сравнению с главным в первой строке Ур. (1.32), который соответствует упругому вкладу спин-флипа. Функция $\mathcal{F}(x, y, z)$ определяется как

$$\mathcal{F}(x, y, z) = 1 + \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{x - y}{z} \right) - \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{x + y}{z} \right), \quad (1.33)$$

где $\operatorname{erf}(z) = (2/\sqrt{\pi}) \int_0^z dt \exp(-t^2)$ обозначает функцию ошибок. Выражение (1.32) справедливо при выполнении

$$(1 - J/\delta)^2 \ll (2/\pi^2) \ln[\delta/(\delta - J)] \ll 1. \quad (1.34)$$

Это ограничивает значение полного спина в основном состоянии до интервала $2 \lesssim \bar{S} \lesssim 70$. Правое неравенство в уравнении (1.34) гарантирует, что флуктуации S малы и гауссовы. Для $\bar{S} \gg (1/2) \exp(\pi^2/2)$ флуктуации полного спина становятся негауссовыми (см. ссылки [55, 79]). Левое неравенство в Ур. (1.34) гарантирует, что эффективная температура $T_{\text{eff}} \sim (\delta/\pi) \sqrt{2 \ln[\delta/(\delta - J)]}$, индуцированная флуктуациями и сглаживающая ступеньки при $\varepsilon = \pm 2(\delta - J)$ больше температуры, $T_{\text{eff}} \gg \delta - J \gtrsim T$. Отметим, что эффективная температура мала по сравнению со средним расстоянием между уровнями, $T_{\text{eff}} \ll \delta$. В целом, флуктуации одночастичных уровней усиливают вклад упругого спин-флипа (аналогично усилению спиновой восприимчивости [52, 21, 55, 79]) и сглаживают ступени вкладов неупругого спин-флипа и неупругого рассеяния без спин-флипа.

1.7 Неупругое сечение рассеяния в присутствии магнитного поля

Теперь рассмотрим поведение неупругого сечения при наличии магнитного поля B . Мы предполагаем, что в дополнение к расщеплению Зеемана это магнитное поле вызывает орбитальный эффект и нарушает

симметрию по отношению к обращению времени. Тогда параметр β становится равным 2, $\beta = 2$. Рассмотрим случай расщепления Зеемана, которое сильно по сравнению с температурой, но мало по отношению к δ , $\delta \gg b = \mu_B g_L B \gg T$. Тогда снимается вырождение низколежащих состояний с общим спином S . Наинизшее энергетическое состояние с полным спином S соответствует максимальной полной спиновой проекции вдоль магнитного поля $S_z = S$ (мы предполагаем $B > 0$). Энергии этих состояний становятся

$$E_S(B) = (\delta - J)S^2 - JS - bS. \quad (1.35)$$

Следовательно, при наличии расщепления Зеемана полный спин в основном состоянии равен $S \approx (\delta + b)/[2(\delta - J)]$ за $\delta - J \ll \delta$.

Отсутствие вырождения по отношению к изменению проекции полного спина делает вклад упругого спин-флипа в неупругое сечение экспоненциально малым по параметру $\beta b \gg 1$. То же самое относится и ко вкладу из-за неупругого рассеяния без спин-флипа. Таким образом, основной вклад в сечение неупругого рассеяния приходит от неупругого рассеяния без спин-флипа:

$$\mathcal{A}_{\text{inel}}^\sigma(\varepsilon) = \frac{4\pi Q^2}{E_c^2} \sum_{\alpha \neq \gamma} \sum'_{f \neq i} p_i \frac{[1 + e^{-\beta\varepsilon}] |\langle i | d_{\gamma, -\sigma}^\dagger d_{\alpha\sigma} | f \rangle|^2}{1 + e^{-\beta(\varepsilon + E_i - E_f)}}. \quad (1.36)$$

Здесь знак штрих указывает на то, что суммирование происходит по низкоэнергетическим многочастичным состояниям i и f , которые характеризуются суммарным спином S и максимальной суммарной спиновой проекцией вдоль магнитного поля, $S_z = S$ (см. рис. 1.1b). Щели между основным состоянием с суммарным спином S и наинизшим многочастичным возбужденным состоянием, $E_\pm(B) = E_\pm \mp b$, ограничены сверху: $\max E_+(B) \leq (\delta + b)/S$ и $\max E_-(B) \leq (\delta + b)/(S + 1)$. Обращаем внимание, что для $S \gg 1$ энергетический масштаб $(\delta + b)/S \approx 2(\delta - J) \ll \delta$. Для вычисления матричных элементов в (1.36) необходимо учитывать, что одночастичный уровень α должен быть самым высоким двукратно занятым уровнем, а γ должен быть самым низким незанятым уровнем или наоборот (см. переход в левом нижнем углу рис. 1.3). Используя результаты для матричных элементов из таблицы 1.1, мы находим следующий результат для неупругого сечения при $|\varepsilon| \ll \delta$ и $T \lesssim (\delta - J) \ll b$:

$$\mathcal{A}_{\text{inel}}^\sigma(\varepsilon) = \frac{4\pi Q^2}{E_c^2} \left[1 - n_F(\varepsilon - E_\sigma(B)) + n_F(\varepsilon + E_{\bar{\sigma}}(B)) \right]. \quad (1.37)$$

Можно убедиться, что $\mathcal{A}_{\text{inel}}^\sigma(\varepsilon)$ при $B < 0$ может быть получена из $\mathcal{A}_{\text{inel}}^{\bar{\sigma}}(\varepsilon)$ для $B > 0$.

Поучительно сравнить результаты для $\mathcal{A}_{\text{inel}}^\sigma(\varepsilon)$ с магнитным полем и без него. Сначала магнитное поле подавляет упругий вклад спин-флип. Во-вторых, вместо четырех ступеней с высотой $1/2$ (при большом спине $S \gg 1$) при энергиях E_\pm и $-E_\pm$ при отсутствии магнитного поля (см. Ур. (1.37)), при наличии расщепления Зеемана выживают только две ступени при $E_\sigma(B)$ и $-E_{\bar{\sigma}}(B)$ высотой 1. Мы подчеркиваем, что в отличие от случая магнитной примеси неупругое рассеяние в присутствии расщепления Зеемана на энергиях $|\varepsilon| \gg E_\sigma(B)$ не является экспоненциально малым по $\beta b \gg 1$. Для энергии $|\varepsilon| \ll E_\sigma(B)$ сечение неупругого рассеяния равно нулю при $T = 0$.

При наличии флуктуаций одночастичных уровней энергии $E_\sigma(B)$ становятся случайными, $E_\sigma(B) \rightarrow E_\sigma(B) + \sigma \Delta E_{2S}$. В результате спин в основном состоянии становится случайным:

$$S = \frac{1}{2(\delta - J)} \left[\delta + b - \delta \Delta n_{2S} \right]. \quad (1.38)$$

Усредняя фермиевские функции в Ур. (1.37) по Δn_{2S} с Гауссовым распределением (1.30) с $\beta = 2$, мы находим неупругое сечение при $|\varepsilon| \ll \delta$ и $T \lesssim (\delta - J) \ll b \ll \delta$

$$\overline{\mathcal{A}_{\text{inel}}^\sigma(\varepsilon)} = \frac{4\pi Q^2}{E_c^2} \left[1 + \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{\pi[\varepsilon - 2(\delta - J)]}{\delta \sqrt{\ln[b/(\delta - J)]}} \right) - \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{\pi[\varepsilon + 2(\delta - J)]}{\delta \sqrt{\ln[b/(\delta - J)]}} \right) \right]. \quad (1.39)$$

этот результат справедлив при условии выполнения следующего неравенства:

$$(\delta - J)^2 \ll \frac{1}{\pi^2} \ln \frac{b}{\delta - J} \ll 1. \quad (1.40)$$

Левое неравенство в Ур. (1.40) означает, что эффективная температура $T_{\text{eff}} = (\delta/\pi) \sqrt{\ln[b/(\delta - J)]}$, сглаживающая ступени в $\mathcal{A}_{\text{inel}}^\sigma(\varepsilon)$ при $E_\sigma(B)$ и $-E_{\bar{\sigma}}(B)$ не слишком мала, $T_{\text{eff}} \gg \delta - J \gtrsim T$. Правое неравенство в Ур. (1.40) гарантирует, что флуктуации полного спина остаются гауссовыми.

1.8 Неупругое сечение в присутствии сильного спин-орбитального взаимодействия

В предыдущем разделе мы показали, что расщепление Зеемана подавляет упругое спин-флип-рассеяние за счет снятия $2S + 1$ вырождения основного состояния. В этой секции мы обсудим еще один механизм подавления упругого спин-флип рассеяния на квантовой точке. Рассматривается квантовая точка, изготовленная в 2D электронном газе с сильным спин-орбитальным взаимодействием. Такую квантовую точку можно описать универсальным гамильтонианом (1.2), в котором обмен Гейзенберга заменен обменом Изинга: $J\mathbf{S}^2 \rightarrow JS_z^2$ [4],[7]. В этом случае статистика одночастичных уровней описывается ансамблем унитарной симметрии (класс A) с $\beta = 2$.

Низкоэнергетические многочастичные состояния соответствуют суммарному спину S и максимальной или минимальной спиновой проекции $S_z = \pm S$. Энергии этих состояний равны

$$E_S = (\delta - J)S^2. \quad (1.41)$$

Поэтому суммарный спин в основном состоянии равен 0 ($1/2$) в случае четного (нечетного) числа электронов.

Для четного числа электронов, так как $S = 0$, упругое спин-флип рассеяние исчезает. Для $T \lesssim \delta - J$ и $|\varepsilon| \lesssim \delta$, единственный вклад в $\mathcal{A}_{\text{inel}}^\sigma(\varepsilon)$ остается из-за неупругого спин-флип:

$$\mathcal{A}_{\text{inel}}^{\sigma,e}(\varepsilon) = \frac{4\pi Q^2}{E_c^2} \left[1 - n_F(\varepsilon - \Delta_e) + n_F(\varepsilon + \Delta_e) \right]. \quad (1.42)$$

Здесь $\Delta_e = \delta - J$ означает щель между основным состоянием с $S = S_z = 0$ и состоянием с $S = 1$ и $S_z = \pm 1$.

В случае нечетного числа электронов, поскольку $S = 1/2$, основное состояние дважды вырождено. Тогда упругое спин-флип рассеяние такое же, как и для магнитной примеси со спином $1/2$. Кроме того, неупругое спин-флип дает вклад в неупругое сечение. Тогда при $T \lesssim \delta - J$ и $|\varepsilon| \lesssim \delta$ находим

$$\mathcal{A}_{\text{inel}}^{\sigma,o}(\varepsilon) = \frac{2\pi Q^2}{E_c^2} \left[1 + 1 - n_F(\varepsilon - \Delta_o) + n_F(\varepsilon + \Delta_o) \right]. \quad (1.43)$$

Здесь $\Delta_o = 2(\delta - J)$ означает щель между основным состоянием с $S = 1/2$ и состояниями с $S = 1$ и $S_z = \pm 1$.

Отметим, что неупругое сечение рассеяния при $|\varepsilon| \gg \delta - J$ независимо от четности числа электронов в квантовой точке,

$$\mathcal{A}_{\text{inel}}^{\sigma,e}(\varepsilon) = \mathcal{A}_{\text{inel}}^{\sigma,o}(\varepsilon) = \frac{4\pi Q^2}{E_c^2}. \quad (1.44)$$

В случае температур $\delta \gg T \gg \delta - J$ низколежащие многочастичные состояния с полным спином $S \lesssim \sqrt{T/(\delta - J)}$ дают вклад в неупругое сечение при $|\varepsilon| \lesssim \delta$. Аналогично случаю низких температур главный вклад приходит от неупругого спин-флип. Тогда мы получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\text{inel}}^{\sigma}(\varepsilon) &= \frac{8\pi Q^2}{E_c^2} \left[\sum_{S_z=-\infty}^{\infty} e^{\beta(J-\delta)S_z^2} \right]^{-1} \sum_{S_z=-\infty}^{\infty} e^{\beta(J-\delta)S_z^2} \\ &\times F(\varepsilon, (\delta - J)(2S_z + 1)) = \frac{8\pi Q^2}{E_c^2}. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Обратим внимание, что неупругое сечение при $|\varepsilon| \sim \delta$ и $\delta \gg T \gg \delta - J$ в два раза больше, чем при $T \ll \delta - J$. Эта разница обусловлена следующим. При высоких температурах, $\delta \gg T \gg \delta - J$, следующие четыре комбинации начального и конечного состояний вносят свой вклад в неупругое спин-флип сечение (см. Ур. (1.21)): (i) $|i\rangle = |S, S\rangle$ и $|f\rangle = |S-1, S-1\rangle$; (ii) $|i\rangle = |S, -S\rangle$ и $|f\rangle = |S+1, -S-1\rangle$; (iii) $|i\rangle = |S+1, S+1\rangle$ и $|f\rangle = |S, S\rangle$; (iv) $|i\rangle = |S-1, -S+1\rangle$ и $|f\rangle = |S, -S\rangle$. В случае низких температур, $T \ll \delta - J$, когда только состояние с наименьшим спином ($S = 0$ или $S = 1/2$) вносит вклад, переходы (i) и (iv) невозможны.

В случае четного числа электронов щель Δ_e определяется разностью расстояния между наинизшими однократно занятыми уровнями и наивысшим двукратно занятыми уровнями и обменной энергией. Как известно, расстояние между уровнями сильно флуктуирует, и его распределение может быть хорошо аппроксимировано Wigner Surmise (см. ссылку [59]). Типичный масштаб этого распределения задается средним расстоянием между уровнями. Качественно, усреднение Ур. (1.42) по распределению Δ_e приводит к такой же форме зависимости от энергии, но с эффективной температурой, пропорциональной среднему интервалу между уровнями. Аналогичные результаты можно получить после усреднения уравнения (1.43). Неупругое сечение при температурах $\delta \gg T \gg \delta - J$ является устойчивым по отношению к флуктуациям, так как не зависит от конкретных свойств одночастичного спектра.

1.9 Вычисление наблюдаемых времен дефазировки

Наши результаты для сечения неупругого рассеяния электрона на квантовой точке при низких температурах позволяют нам оценить соответствующий вклад во время дефазировки. Предположив конечную концентрацию n_s квантовых точек, мы вводим частоту неупругого рассеяния для электрона следующим образом

$$\tau_{\text{inel}}^{-1}(\varepsilon, T) = \frac{n_s}{\nu} \sum_{\sigma=\pm} \mathcal{A}_{\text{inel}}^{\sigma}(\varepsilon). \quad (1.46)$$

Напомним, что ν обозначает среднюю плотность состояний на одну прецессию спина для электронов в электронной жидкости, окружающей квантовые точки. Обратим внимание, что в статьях [60], [45] неупругость при конечной температуре напрямую связана с разницей между мнимой частью T -матрицы и диагональным элементом ее квадрата. Хотя это верно для случая нулевой температуры, при конечной температуре это не так (см. обсуждение после Ур. (1.14)). В нашем случае по определению величина $\mathcal{A}_{\text{inel}}^{\sigma}(\varepsilon)$ включает в себя только неупругие процессы.

Используя тот факт, что величина $1/\tau_{\text{inel}}(\varepsilon, T)$ представляет собой собственно-энергетическую часть для пропагатора электронной пары (куперона), можно оценить время дефазинга $\tau_{\phi}(T)$, входящее в выражение для слаблокализационной поправки к проводимости [60]. Конкретное выражение зависит от размерности. Имея в виду эксперименты [73, 87] ограничимся двумерием, $d = 2$. В этом случае можно получить [60]:

$$\tau_{\phi}^{-1}(T) = \exp \left[\int d\varepsilon n'_F(\varepsilon) \ln \tau_{\text{inel}}(\varepsilon, T) \right]. \quad (1.47)$$

Отметим, что приведенная выше оценка для $\tau_{\phi}(T)$ основана на независимом рассмотрении неупругого рассеяния на квантовых примесях и других неупругих процессов. Как обсуждалось в статье [60], такой упрощенный подход действителен для $d = 2$ при следующих допущениях: (i) система является очень хорошим металлом: проводимость $g \gg (\nu J_s)^{-3}$; (ii) плотность квантовых примесей не велика, $n_s \ll \nu T_K$. Для нашей задачи характерное обменное взаимодействие между электронами и квантовыми примесями (квантовыми точками) можно оценить как $\nu J_s = Q/E_c$ (см. гл. 1.4). Температура Кондо T_K дается стандартным выражением, $T_K \sim E_c \exp(-1/\nu J_s)$.

Обсуждение $\tau_\phi(T)$ начнем со случая изотропного обменного взаимодействия в квантовой точке. Рядом с неустойчивостью Стоунера, $\delta - J \ll \delta$, при температурах $T \ll \delta - J$, неупругая частота рассеяния $\mathcal{A}_{\text{inel}}^\sigma(\varepsilon)$ дается Ур. (1.25). Выполняя разложение по малым членам, зависящим от энергии, находим из Ур. (1.47)

$$\tau_\phi^{-1}(T) = \frac{8\pi n_s Q^2}{\nu E_c^2} \left[\frac{(S+1)(2S+1)}{3} + \beta E_- e^{-\beta E_-} + \frac{2S+3}{2S+1} \beta E_+ e^{-\beta E_+} \right] \quad (1.48)$$

Слабая зависимость скорости дефазировки от температуры обусловлена возможностью неупругого рассеяния, которое включает переходы на нижним многочастичные уровни квантовой точки. Также подчеркиваем, что вклад упругого спин-флип в скорость дефазировки отличается от стандартного выражения для магнитной примеси, которое пропорционально $S(S+1)/3$. Повторяем, что это происходит из-за дополнительных корреляций между амплитудами туннелирования для переходов на различные уровни квантовой точки. Используя Ур. (1.28) мы получаем при высоких температурах $\delta - J \ll T \ll \delta$:

$$\tau_\phi^{-1}(T) = \frac{8\pi n_s Q^2}{\nu E_c^2} \left[\frac{\delta(3\delta - 2J)}{6(\delta - J)^2} + \frac{T}{3(\delta - J)} \right]. \quad (1.49)$$

Отметим, что на самом деле обе оценки (1.48) и (1.49) также справедливы в размерности $d = 3$. При наличии расщепления Зеемана упругий спин-флип подавляется. Тогда с помощью Ур. (1.37), мы находим следующую оценку скорости дефазировки при низких температурах $T \ll \delta - J$ и умеренных магнитных полях, $\delta \gg b \gg \delta - J$:

$$\tau_\phi^{-1}(T) = \frac{4\pi e^2 n_s Q^2}{\nu E_c^2} [e^{-\beta E_+(B)} + e^{-\beta E_-(B)}]. \quad (1.50)$$

Отметим, что скорость дефазировки в данном случае экспоненциально мала по температуре, $\tau_\phi^{-1}(T) \sim \exp(-2\beta(\delta - J))$.

В случае обменного взаимодействия Изинга в квантовой точке $\tau_\phi(T)$ зависит от четности числа электронов при низких температурах $T \ll \delta - J$. Используя Ур. (1.42) и (1.43), мы получаем

$$\tau_{\phi,e}^{-1}(T) = \frac{8\pi n_s Q^2}{\nu E_c^2} e^{-\beta \Delta_e} \quad (1.51)$$

для четного числа электронов и

$$\tau_{\phi,o}^{-1}(T) = \frac{4\pi n_s Q^2}{\nu E_c^2} [1 + \pi e^{-\beta\Delta_o}] \quad (1.52)$$

для нечетного числа электронов. При более высоких температурах $\delta \gg T \gg \delta - J$, время дефазировки становится нечувствительно к четности числа электронов:

$$\tau_{\phi}^{-1}(T) = \frac{16\pi n_s Q^2}{\nu E_c^2}. \quad (1.53)$$

Таким образом, время дефазировки из-за рассеяния на квантовой точке с обменом Изинга в температурном диапазоне $\delta \gg T \gg \delta - J$ похоже на магнитную примесь.

1.10 Пренебрежения

Мы отмечаем, что в нашем подходе полностью игнорируется влияние резервуара электронов на квантовую точку. Прежде всего, связь с резервуаром приводит к уширению (Γ) одночастичных уровней, что составляет порядка $g_T\delta$. Им можно пренебречь, если температура не слишком низкая, $T \gg g_T\delta$. Во-вторых, из-за связи с резервуаром вероятности p_i многочастичных состояний квантовой точки могут стать неравновесными, т.е. сильно отличаться от формы Гиббса. Однако, в случае малой частоты туннелирования (которая составляет порядка $\Gamma \sim g_T\delta$) по сравнению с внутренней неупругой частотой τ_{ee} из-за электрон-электронного взаимодействия внутри квантовой точки, этим неравновесным эффектом можно пренебречь. Для квантовой точки размером больше, чем средняя длина свободного пробега l , внутренняя неупругость может быть оценена как [83],[18]: $1/\tau_{ee} \sim T^2/(g_{Th}^2\delta)$. Условие $\Gamma \ll 1/\tau_{ee}$ приводит к следующему ограничению на температуры, при котором наше предположение о равновесии для квантовой точки справедливо:

$$T \gg \delta(g_T g_{Th}^2)^{1/2}. \quad (1.54)$$

Так как в этой работе мы изучаем температуры ниже $\delta - J$, то возникает следующее условие для туннельных кондактансов (или для близости к нестабильности Стоунера):

$$g_T \ll \frac{1}{g_{Th}^2} \left(\frac{\delta - J}{\delta} \right)^2. \quad (1.55)$$

Также в нашем подходе пренебрегается влиянием резервуара на динамику полного спина в квантовой точке. В частности, мы пренебрегаем перенормировкой величины суммарного спина в связи с подключением к резервуару. Используя адиабатическое приближение для большого суммарного спина квантовой точки вблизи неустойчивости Стоунера [74], можно продемонстрировать, что спин движется диффузионно на сфере Блоха с диффузионной константой, пропорциональной туннельной связи Q [81],[82].

1.11 Релевантность для экспериментов

Последние эксперименты [73, 87] дают результаты, которые могут быть интерпретированы как образование локальных спиновых капель в 2D неупорядоченной электронной жидкости при низких температурах. Как известно [34], при низких температурах 2D неупорядоченная электронная жидкость стремится к неустойчивости Стоунера так, что перенормированная константа взаимодействия Ферми-жидкости в триплетном канале стремится к -1 , $F_0^\sigma \approx -1$. Возникновение спиновых капель с конечным спином $S_g = 1/[2(1 + F_0^\sigma)] \gg 1$ вблизи неустойчивости Стоунера в неупорядоченной электронной жидкости из-за флуктуаций в триплетном (спиновом) канале было предсказано в статье [65]. Спиновая восприимчивость Паули $\chi \sim \nu/(1 + F_0^\sigma)$ доминирует при высоких температурах. Из-за наличия спиновых капель ожидается, что спиновая восприимчивость типа Кюри доминирует при $\chi \sim n_s S_g^2/T$ и при низких температурах $T \ll T_* = n_s^{fl} S_g/\nu$. Здесь n_s^{fl} обозначает плотность спиновых капель. Отметим, что в экспериментах [73, 87] спиновая восприимчивость ведет себя как $\chi \sim T^{-2}$, что предполагает сильную температурную зависимость плотности капель n_s^{fl} , которая остается неясной. Рассеяние электронов на таких спиновых каплях приводит к следующему вкладу в скорость дефазировки: $n_s^{fl} S_g^2/(\nu g)$ где g - это кондактанс 2D неупорядоченной электронной жидкости [65]. Сравнивая этот вклад со стандартной скоростью дефазировки, обусловленной электронн-электронным взаимодействием в триплетном канале, $T/[g(1 + F_0^\sigma)]$ [9], можно обнаружить, что скорость дефазировки должна насыщаться ниже той же самой температуры кроссовера T_* . Таким образом, при наличии таких спиновых капель температурная зависимость спиновой восприимчивости типа Кюри должна сопровождаться временем дефазировки, не зависящим от температуры. Напротив, в экспериментах [73, 87] наряду с линейной частотой дефазировки по температуре наблюдалась сильная

температурная зависимость спиновой восприимчивости. Таким образом, наше главное сообщение в этой части - сказать, что линейная по скорости дефазинга может сопровождаться примерно Кюри-подобной магнитной восприимчивостью, что и происходит в эксперименте.

Точнее, давайте теперь предположим, что есть некоторые электронные капли в 2D электронной жидкости. Тогда в такой капле может быть локализовано некоторое число электронов. Мы моделируем такую каплю размера $L_d \gg l \gg \lambda_F$ квантовой точкой с обменным взаимодействием Гейзенберга $J = -F_0^\sigma \delta$. Здесь λ_F обозначает длину волны Ферми. Тогда при температурах $T \ll T_* = n_s S_g / \nu$, где, напомним, $S_g \approx J / [2(\delta - J)] = 1 / [2(1 + F_0^\sigma)] \gg 1$ - суммарный спин капли, ожидается, что в спиновой восприимчивости доминирует температурная зависимость типа Кюри, $\chi \sim n_s S_g^2 / T$. Используя Ур. (1.49) в качестве оценки вклада в скорость дефазировки из-за рассеяния на спиновых каплях, мы находим, что она доминирует над линейным вкладом в T при температурах $T \ll T_s \sim \eta^2 T_*$, где параметр $\eta = (Q/E_c) \sqrt{g} \sim g_{\text{ch}} l / (r_s L_d \sqrt{g})$. При условии, что параметр взаимодействия $r_s \sim \lambda_F / a_B \sim 1$, где a_B обозначает радиус Бора, и $g \gtrsim 1$, мы находим $\eta \ll 1$. Здесь мы используем условие малого туннельного кондактанса на канал, $g_{\text{ch}} \ll 1$. Таким образом, в диапазоне температур $T_s \ll T \ll T_*$ мы ожидаем температурную зависимость спиновой восприимчивости типа Кюри, но обычную, линейную в T , скорость дефазировки. Вклад в скорость дефазировки из-за рассеяния электронов на электронных каплях с конечным спином будет доминировать над вкладом рассеяния, возникающего из-за флуктуаций в триплетном канале [65], если следующее условие выполняется $n_s^{fl} \ll \eta^2 n_s$ или, эквивалентно, $T_* \ll T_s$. Поскольку плотность капель спина n_s не может быть больше $1/L_d^2$, температура насыщения меньше среднего расстояния между уровнями на квантовой точке, $T_s \ll \delta$ при условии $\eta \ll 1/\sqrt{S_g}$. Для подтверждения нашего предложения существования двух характерных температур T_s и T_* необходимы более подробные данные о структуре и свойствах капель спина.

1.12 Заключение

Подводя итог, мы изучили рассеяние электронов на квантовой точке с большой зарядовой и обменной энергией. Мы рассматриваем рассеяние, обусловленное туннелированием между электронной жидкостью и квантовой точкой. При следующих предположениях: (i) квантовая точка находится в режиме сильной кулоновской блокады с целым числом

электронов (кулоновская долина); (ii) квантовая точка находится вблизи неустойчивости Стоунера; мы вычисляем неупругое сечение в четвёртом порядке в амплитудах туннелирования. Мы подробно проанализировали поведение неупругого сечения при низких температурах и энергиях, $T, |\varepsilon| \ll \delta$, для трех случаев: квантовая точка с обменом Гейзенберга без и с расщеплением Зеемана и квантовая точка с обменом Изина. Используя наши результаты для неупругого сечения, мы оцениваем соответствующие вклады в скорость электронного дефазинга. Мы используем наши результаты для оценки температуры, ниже которой время дефазинга из-за рассеяния на спиновых каплях в 2D неупорядоченной электронной жидкости должно насыщаться. В согласии с экспериментами мы обнаружили, что она значительно ниже температурного масштаба, ниже которого ожидается, что спиновая восприимчивость будет демонстрировать поведение типа Кюри.

Глава 2

Квантовые поправки к проводимости за счет неупругого рассеяния на магнитных примесях

Как известно, на низкотемпературные свойства электронной системы значительное влияние оказывает рассеяние электронов на редких магнитных примесях. Самый простой подход заключается в классической трактовке магнитной примеси как случайного трехмерного вектора фиксированной длины. Несмотря на то, что такая модель игнорирует квантовую динамику спина, т.е. учитывает только упругое рассеяние на магнитной примеси, модель достаточна, чтобы произвести ряд интересных, нетривиальных эффектов, например, подавление температуры сверхпроводящего перехода за счет упругого спин-флипа электрона [2], подавление температурной зависимости слаболокализационной поправки к проводимости [54, 29] и др.

За эффект Кондо отвечает квантовая динамика спина магнитной примеси: перенормировка обменного взаимодействия между электроном и спином примеси, что приводит к немонотонной температурной зависимости удельного сопротивления [49]. Физически квантовая динамика спина позволяет электрону неупруго рассеиваться на магнитной примеси [101, 36, 19]. Например, зеemanовское расщепление уровней магнитной примеси приводит к энергетической зависимости спин-флип рассеяния даже в пределах приближения Борна [91]. Наличие потенциального упругого рассеяния вместе с неупругим спин-флип рассеянием приводит к модификации эффекта Кондо и поведения квантовых поправок к проводимости [69, 93, 45].

Например, в неупорядоченных электронных системах неупругое спин-флип рассеяние влияет на слаболокализационную поправку и мезоскопические флуктуации проводимости через зависящее от энергии время дефазировки, вызванное спин-флип рассеянием [91, 44, 60, 61, 43]. Помимо влияния на слаболокализационную поправку, неупругое рассеяние на магнитных примесях приводит к появлению поправки типа Альтшулера-Аронова к проводимости [69, 68, 85]. Изучены квантовые поправки к проводимости двумерной неупорядоченной взаимодействующей электронной системы в диффузионном пределе, вызванные неупругим рассеянием на редких магнитных примесях. Мы сосредоточимся на случае сильно различных g -факторов для электронов и магнитных примесей. В рамках приближения Борна для неупругого рассеяния на магнитных примесях мы находим дополнительные температурозависимые поправки к проводимости типа Альтшулера-Аронова. Наши результаты показывают, что низкотемпературный транспорт в взаимодействующих неупорядоченных электронных системах с редкими магнитными примесями представляет больший интерес, чем принято считать на основе рассмотрения спинов магнитных примесей как классических.

2.1 Нелинейная сигма-модель Финкельштейна

Мы рассматриваем двумерную взаимодействующую электронную систему при наличии короткодействующего потенциального беспорядка. Кроме того, мы предполагаем наличие слабого спин-флип рассеяния, обусловленного обменным взаимодействием редких магнитных примесей с электронами, описываемым следующим гамильтонианом

$$H_{\text{mag}} = J \sum_j \psi^\dagger(\mathbf{r}_j) \mathbf{S}_j \boldsymbol{\sigma} \psi(\mathbf{r}_j) . \quad (2.1)$$

Здесь $\boldsymbol{\sigma}$ и \mathbf{S}_j означают матрицы Паули и оператор спина магнитной примеси в точке \mathbf{r}_j соответственно. Операторы рождения и уничтожения электронов обозначаются как $\psi^\dagger(\mathbf{r})$ и $\psi(\mathbf{r})$. Мы будем рассматривать редкий магнитный беспорядок при следующих допущениях: (i) позиции примесей \mathbf{r}_j имеют распределение Пуассона; (ii) спины примесей \mathbf{S}_j независимы, но имеют свою собственную квантовую динамику.

В отсутствие магнитного рассеяния эффективная теория поля для неупорядоченных взаимодействующих электронов в диффузионном

пределе, $T \ll 1/\tau$, где τ обозначает упругое среднее время свободного пробега, определяется стандартным образом (обзор см. в обзорах [34, 17]). В отсутствие магнитного поля и магнитных примесей гамильтониан системы сохраняет симметрии по вращению спина и обращения времени. Тогда эффективная теория поля формулируется в терминах матричного поля $Q \in G/K$ с $G = \text{Sp}(2N)$ и $K = \text{Sp}(N) \times \text{Sp}(N)$. Ранг G равен $N = 4N_r N_m$, где N_m обозначает количество задействованных частот Мацубары, а N_r - количество реплик. Для вычисления физических наблюдаемых величин необходимо сделать два предела: $N_m \rightarrow \infty$ и $NN_r \rightarrow 0$, в конце вычислений. Отметим, что предел $N_m \rightarrow \infty$ следует делать в соответствии с калибровочной инвариантностью (подробнее см. ссылку [15]). Коэффициент 4 появляется в связи с тем, что необходимо учитывать спин и Намбу (пространство частица-дырка). С учётом расщепления Зеемана из-за внешнего магнитного поля эффективное действие можно записать следующим образом [32, 31, 33].

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_\sigma = & - \int d\mathbf{r} \text{Tr} \left[\frac{g}{32} (\nabla Q)^2 - 4\pi T Z_\omega \eta Q - i Z_s b_e t_{33} Q \right] \\ & - \frac{\pi T}{4} \sum_{\alpha, n, r, j} \Gamma_j \int d\mathbf{r} \text{Tr} I_n^\alpha t_{rj} Q \text{Tr} I_{-n}^\alpha t_{rj} Q. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь 16 матриц t_{rj} , $j, r = 0, 1, 2, 3$ действуют в тензорном произведении пространств спина (индекс j) и Намбу (индекс r):

$$t_{rj} = \tau_r \otimes s_j, \quad r, j = 0, 1, 2, 3. \quad (2.3)$$

Здесь матрицы τ_0 и s_0 означают 2×2 единичные матрицы и

$$\tau_1/s_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2/s_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3/s_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

эффективное действие (2.2) записано с использованием следующих матриц

$$\eta_{nm}^{\alpha\beta} = n \delta_{nm} \delta^{\alpha\beta} t_{00}, \quad (I_k^\gamma)_{nm}^{\alpha\beta} = \delta_{n-m, k} \delta^{\alpha\beta} \delta^{\alpha\gamma} t_{00}, \quad (2.4)$$

где $\alpha, \beta = 1, \dots, N_r$ означают индексы реплик, а индексы n, m соответствуют фермионным частотам Мацубары $\varepsilon_n = \pi T(2n + 1)$. Общая (включая спин) безразмерная (в единицах e^2/h) проводимость Друде обозначается g . Амплитуды взаимодействия Γ_j (для синглетного канала $\Gamma_0 = \Gamma_s$, а для триплетного канала $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = \Gamma_t$) описывают электрон-электронное взаимодействие в канале "частица-дырка". Далее также будет удобно использовать $\gamma_j = \Gamma_j/Z_\omega$ и

$\gamma_{s,t} = \Gamma_{s,t}/Z_\omega$. Параметр Z_ω учитывает нетривиальную перенормировку частоты при ренормгруппе [32, 31, 33]. Отметим, что затравочное значение параметра Z_ω равно $\pi\nu/4$, где ν обозначает плотность состояний на уровне Ферми. Последний член в первой строке Eq. (2.2) описывает влияние параллельного магнитного поля на электроны. Этот член явно нарушает симметрию по обращению времени. Величина $Z_s = Z_\omega + \Gamma_t$ описывает Ферми-жидкостное усиление g-фактора (подробности см. в обзорах [34, 17]). Отметим, что в этой главе мы пренебрегаем электронн-электронным взаимодействием в куперовском канале.

По построению матрица $Q(\mathbf{r})$ описывает локальные вращения вокруг пространственно независимой матрицы Λ :

$$Q = \mathcal{T}^{-1}\Lambda\mathcal{T}, \quad \Lambda_{nm}^{\alpha\beta} = \text{sgn } \varepsilon_n \delta_{nm} \delta^{\alpha\beta} t_{00}. \quad (2.5)$$

Здесь матрицы $\mathcal{T} \in G$ удовлетворяют следующему соотношению симметрии:

$$C(\mathcal{T}^{-1})^T = \mathcal{T}C, \quad \mathcal{T}^T C = C\mathcal{T}^{-1}, \quad (2.6)$$

где $C = it_{12}$. Символ \mathcal{T}^T означает матричное транспонирование \mathcal{T} . Как следствие Ур. (2.5) и (2.6), матрица Q удовлетворяет локальной нелинейной связи, $Q^2(\mathbf{r}) = 1$, удовлетворяет условию $\text{Tr } Q = 0$ и условию зарядового сопряжения

$$Q = Q^\dagger = C^T Q^T C. \quad (2.7)$$

При наличии магнитных примесей полное эффективное действие \mathcal{S} - это сумма действия нелинейной сигма модели Финкельштейна \mathcal{S}_σ и дополнительной части \mathcal{S}_{mag} , т.е. $\mathcal{S} = \mathcal{S}_\sigma + \mathcal{S}_{\text{mag}}$. Для редких магнитных примесей последняя может быть записана как сумма по вкладам отдельных магнитных примесей [57]:

$$\mathcal{S}_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \sum_j \text{Tr} \ln \left(1 + i\pi\nu J Q(\mathbf{r}_j) \tau_3 \boldsymbol{\sigma} \hat{\mathbf{S}}_j \right). \quad (2.8)$$

Здесь мы вводим следующее обозначение:

$$\hat{\mathbf{S}}_j = \sum_n \mathbf{S}_j(i\omega_n) I_n, \quad \mathbf{S}_j(i\omega_n) = \int_0^\beta d\tau \mathbf{S}_j(\tau) e^{i\omega_n \tau}, \quad (2.9)$$

где $\beta = 1/T$, $\omega_n = 2\pi T n$, и матрица I_n определяется как

$$(I_k)_{nm}^{\alpha\beta} = \delta_{n-m,k} \delta^{\alpha\beta} t_{00}. \quad (2.10)$$

Обращаем внимание, что форма (2.8) действия \mathcal{S}_{mag} эквивалентна самосогласованному T -матричному приближению для магнитного рассеяния, т.е. она выводится с учетом всех порядков при рассеянии на одной магнитной примеси, но с пренебрежением вкладами с пересекающимися линиями примесей.

Усреднение Пуассона по позициям магнитных примесей мы выполняем с помощью следующего соотношения [35].

$$\left\langle \exp \sum_j f(\mathbf{r}_j) \right\rangle = \exp \left\{ n_s \int d\mathbf{r} \left[e^{f(\mathbf{r})} - 1 \right] \right\}, \quad (2.11)$$

где n_s обозначает среднюю концентрацию магнитных примесей. Тогда мы находим, что вклад в эффективное действие, обусловленный магнитными примесями, становится

$$\mathcal{S}_{\text{mag}} \rightarrow n_s \int d\mathbf{r} \left(\left\langle e^{\frac{1}{2} \text{Tr} \ln(1 + i\pi\nu J Q(\mathbf{r})\tau_3 \sigma \hat{\mathbf{S}})} \right\rangle_{\mathbf{S}} - 1 \right). \quad (2.12)$$

Где $\langle \dots \rangle_{\mathbf{S}}$ означает усреднение по динамике одной магнитной примеси.

В этой главе мы ограничиваем наше рассмотрение приближением Борна для рассеяния на одной магнитной примеси. Поэтому мы можем разложить $\text{Tr} \ln$ в Ур. (2.12) до второго порядка по J . Тогда мы находим

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\text{mag}} = & \frac{n_s \pi \nu J}{2} \int d\mathbf{r} \left\langle i \text{Tr} Q \tau_3 \sigma \langle \hat{\mathbf{S}} \rangle_{\mathbf{S}} + \frac{\pi \nu J}{2} \text{Tr} (Q \tau_3 \sigma \hat{\mathbf{S}})^2 \right. \\ & \left. - \frac{\pi \nu J}{4} \left(\text{Tr} Q \tau_3 \sigma \hat{\mathbf{S}} \right)^2 \right\rangle_{\mathbf{S}}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Для того, чтобы двигаться дальше, необходимо выполнить усреднение по динамике спина магнитной примеси в \mathcal{S}_{mag} . Игнорирование обратной связи электронов на спин магнитной примеси позволяет нам написать примесный гамильтониан следующим образом: $H_i = b_i S_z$. Затем нам нужны соответствующие спин-спиновые корреляционные функции Мацубары:

$$\chi_{\pm}(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{S(S+1)} \begin{cases} \langle S_{\pm}(\tau_1) S_{\mp}(\tau_2) \rangle_{\mathbf{S}}, & \tau_1 > \tau_2, \\ \langle S_{\mp}(\tau_2) S_{\pm}(\tau_1) \rangle_{\mathbf{S}}, & \tau_2 > \tau_1, \end{cases} \quad (2.14)$$

где $S_{\pm} = S_x \pm iS_y$, и

$$\chi_{zz}(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{S(S+1)} \begin{cases} \langle S_z(\tau_1) S_z(\tau_2) \rangle_{\mathbf{S}}, & \tau_1 > \tau_2, \\ \langle S_z(\tau_2) S_z(\tau_1) \rangle_{\mathbf{S}}, & \tau_2 > \tau_1. \end{cases} \quad (2.15)$$

Используя уравнения движения для свободного спина в магнитном поле мы находим следующие результаты:

$$\chi_{\pm}(i\omega_n) = -e^{i\omega_n 0^+} \frac{2M_1}{i\omega_n \pm b_1}, \quad \chi_{zz}(i\omega_n) = \delta_{n,0} \beta M_2. \quad (2.16)$$

Где мы вводим

$$M_n = \frac{1}{S(S+1)} \sum_{m=-S}^{m=S} m^n e^{-\beta b_1 m} \Big/ \sum_{m=-S}^{m=S} e^{-\beta b_1 m}. \quad (2.17)$$

Заметим следующее полезное соотношение $e^{-\beta b_1} \langle S_- S_+ \rangle_S = \langle S_+ S_- \rangle_S$ и $M_2 = 1 + M_1 \coth(b_1/2T)$. Используя (2.16), получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\text{mag}} = \int d\mathbf{r} \left\{ \frac{i}{2} n_s \pi \nu J \langle S_z \rangle_S \text{Tr } t_{33} Q + \frac{Z_\omega T}{4\tau_{s0}} \sum_n \chi_+(i\omega_n) \right. \\ \times \left[\text{Tr } t_- I_n Q t_+ I_{-n} Q - \frac{1}{2} \text{Tr } t_- I_n Q \text{Tr } t_+ I_{-n} Q \right] \\ \left. + \frac{Z_\omega}{2\tau_{s0}} M_2 \left[\text{Tr } t_{33} Q t_{33} Q - \frac{1}{2} \text{Tr } t_{33} Q \text{Tr } t_{33} Q \right] \right\}, \quad (2.18) \end{aligned}$$

где $t_{\pm} = t_{31} \pm it_{32}$ и

$$\frac{1}{\tau_{s0}} = \frac{n_s (\pi \nu J)^2 S(S+1)}{2Z_\omega} \quad (2.19)$$

обозначает классическую частоту спин-флип при нулевом магнитном поле.

Первый член в правой части Ур. (2.18) соответствует дополнительному зеемановскому расщеплению электронов за счет намагничивания магнитных примесей. Второй член в правой части Ур. (2.18) описывает вклад, вызванный неупругим спин-флип рассеянием на магнитных примесях. Подчеркнем, что в отличие от члена, обусловленного электрон-электронным взаимодействием, см. вторую строку в Ур.(2.2), неупругий член, обусловленный рассеянием на магнитных примесях, смешивает различные каналы реплики.

2.2 Пертурбативное разложение

Для пертурбативного анализа (по $1/g$) действия $\mathcal{S}_\sigma + \mathcal{S}_{\text{mag}}$ нам нужно разрешить условие $Q^2 = 1$. Чтобы это сделать, мы используем корневую

параметризацию:

$$Q = W + \Lambda\sqrt{1 - W^2}, \quad W = \begin{pmatrix} 0 & w \\ \bar{w} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

В дальнейшем мы примем следующие обозначения: $W_{n_1 n_2} = w_{n_1 n_2}$ и $W_{n_4 n_3} = \bar{w}_{n_4 n_3}$, где $n_{1,3} \geq 0$ и $n_{2,4} < 0$. Два блока матрицы W связаны следующим соотношением симметрии

$$\bar{w} = -Cw^T C. \quad (2.21)$$

Отметим, что здесь матричное транспонирование действует на индексы Мацубары. Разложение $\mathcal{S}_\sigma + \mathcal{S}_{\text{mag}}$ до второго порядка по W дает следующее гауссово действие:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_\sigma^{(2)} + \mathcal{S}_{\text{mag}}^{(2)} = & -4 \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^d} \sum_{rr':jj'} \sum_{\alpha_i, n_i} [w_{rj}(\mathbf{p})]_{n_1 n_2}^{\alpha_1 \alpha_2} [\bar{w}_{r'j'}(-\mathbf{p})]_{n_4 n_3}^{\alpha_4 \alpha_3} \delta_{n_{12}, n_{34}} \times \\ & \left\{ \delta_{n_1 n_3} \delta_{n_2 n_4} \delta^{\alpha_1 \alpha_3} \delta^{\alpha_2 \alpha_4} \left[\delta_{jj'} \delta_{rr'} Z_\omega \left(Dp^2 + \Omega_{12}^\varepsilon + \frac{1}{\tau_{rj}^{\text{sf}}} + \frac{1}{\tau_{\perp}^{\text{sf}}} \left(h(i\varepsilon_{n_1}) + h(-i\varepsilon_{n_2}) \right) \right) \right. \right. \\ & \left. \left. - Z_s \tilde{b}_e (\delta_{r0} \delta_{r'3} + \delta_{r3} \delta_{r'0}) \mu_{jj'}^{(d)} - Z_s \tilde{b}_e (\delta_{r1} \delta_{r'2} - \delta_{r2} \delta_{r'1}) \mu_{jj'}^{(c)} \right] \right. \\ & \left. - 2\pi T \Gamma^{\text{sf}} \delta^{\alpha_1 \alpha_3} \delta^{\alpha_2 \alpha_4} (1 - \delta_{n_1 n_3}) \delta_{rr'} \lambda_r \left[\delta_{jj'} (\delta_{j0} - \delta_{j3}) \text{Re} \hat{\chi}(i\Omega_{13}^\varepsilon) \right. \right. \\ & \left. \left. + (\delta_{j0} \delta_{j'3} - \delta_{j3} \delta_{j'0}) i \text{Im} \hat{\chi}(i\Omega_{13}^\varepsilon) \right] \right. \\ & \left. + 2\pi T \delta_{jj'} \delta_{rr'} \delta^{\alpha_1 \alpha_2} \delta^{\alpha_3 \alpha_4} \left[\Gamma_j (\delta_{r0} + \delta_{r3}) \delta^{\alpha_2 \alpha_3} + \Gamma^{\text{sf}} \delta_{r3} (\delta_{j1} + \delta_{j2}) \text{Re} \hat{\chi}(i\Omega_{12}^\varepsilon) \right] \right\}. \quad (2.22) \end{aligned}$$

Здесь мы ввели следующие обозначения: $w_{rj} = \text{sp}[wt_{rj}]/4$, где sp обозначает след по спину и индексам частица-дырка, $\lambda_r = \{1, -1, -1, -1, 1\}$, $\Omega_{12}^\varepsilon = \varepsilon_{n_1} - \varepsilon_{n_2}$, $\Omega_{13}^\varepsilon = \varepsilon_{n_1} - \varepsilon_{n_3}$, и $\hat{\chi}(i\omega) = \chi_+(i\omega)/\chi_+(i0)$. Коэффициент диффузии дается $D = g/(16Z_\omega)$. Параметр $\Gamma^{\text{sf}} = n_s (\pi\nu J)^2 S(S+1) \chi(i0)/(4\pi)$ характеризует силу взаимодействия за счет неупругого спин-флип рассеяния. Эффективное расщепление Зеемана для электронов дается $\tilde{b}_e = b_e + \pi n_s \nu J \langle S_z \rangle_S / (2Z_s)$. Матрицы $\mu_{jj'}^{(d)}$ и $\mu_{jj'}^{(c)}$ определены следующим образом

$$\mu_{jj'}^{(d)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{jj'}, \quad \mu_{jj'}^{(c)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{jj'}. \quad (2.23)$$

Вторая строка в Ур. (2.22) включает время упругого спин-флип τ_{rj}^{sf} . Это может быть выражено в терминах статической спиновой восприимчивости следующим образом

$$\frac{1}{\tau_{rj}^{\text{sf}}} = \frac{1}{\tau_{\parallel}^{\text{sf}}} \zeta_{rj}^{\parallel} + \frac{1}{\tau_{\perp}^{\text{sf}}} \zeta_{rj}^{\perp}, \quad (2.24)$$

где $1/\tau_{\parallel}^{\text{sf}} = 2M_2/\tau_{s0}$, $1/\tau_{\perp}^{\text{sf}} = T\chi_+(i0)/\tau_{s0}$, и

$$\zeta_{rj}^{\parallel} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{rj}, \quad \zeta_{rj}^{\perp} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{rj}. \quad (2.25)$$

Для удобства заметим, что

$$\chi_+(i0) = -\frac{2M_1}{b_i} = \begin{cases} 2/(3T), & |b_i| \ll T, \\ 2/[|b_i|(S+1)], & |b_i| \gg T. \end{cases} \quad (2.26)$$

В пределе нулевого расщепления Зеемана, $b_i \rightarrow 0$, частота упругого спин-флип становится равной $1/\tau_{rj}^{\text{sf},(0)} = 2\zeta_{rj}/(3\tau_{s0})$, где матрица ζ_{rj} определена следующим образом

$$\zeta_{rj} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}_{rj}. \quad (2.27)$$

Учитывая, что затравочное значение параметра Z_{ω} равно $\pi\nu/4$, мы получаем известные значения для упругих частот спин-флип в различных диффузионных режимах (см., например [29]).

Функция $h(i\varepsilon_n)$ во второй строке Ур. (2.22) описывает эффект неупругого рассеяния на магнитных примесях на часть пропагатора диффузионных мод, которая является диагональной в пространстве Мацубары. Эта функция определена как ($\varepsilon_n > 0$):

$$h(i\varepsilon_n) = \sum_{\varepsilon_n > \omega_k > 0} \operatorname{Re} \widehat{\chi}(i\omega_k) = \frac{b_i}{2\pi T} \operatorname{Im} \left[\psi \left(1 + \frac{ib_i}{2\pi T} \right) - \psi \left(1 + n + \frac{ib_i}{2\pi T} \right) \right]. \quad (2.28)$$

Здесь $\psi(z)$ обозначает дигамма-функцию Эйлера. Функция $h(i\varepsilon_n)$ является собственно-энергетической поправкой к диффузионным режимам в диаграммном подходе [69]. В частности, функция h содержит дополнительный вклад за счет неупругого спин-флип на магнитных примесях в обратное время жизни “Куперронов”, которая была недавно исследована в работе [43] подробно. Для обсуждения этого эффекта удобно сделать аналитическое продолжение $i\varepsilon_{n_1} \rightarrow \varepsilon_+ = \varepsilon + \Omega/2$ и $i\varepsilon_{n_2} \rightarrow \varepsilon_- = \varepsilon - \Omega/2$. Запаздывающая функция $h^R(\varepsilon)$, соответствующая функции Мацубары $h(i\varepsilon_n)$, дается

$$h^R(\varepsilon) = \frac{b_i}{2\pi T} \left[\frac{1}{2} \sum_{\sigma=\pm} i\sigma \psi \left(\frac{1}{2} - \frac{i\varepsilon}{2\pi T} + \frac{ib_i\sigma}{2\pi T} \right) + \operatorname{Im} \psi \left(1 + \frac{ib_i}{2\pi T} \right) \right]. \quad (2.29)$$

Вещественная часть $h^R(\varepsilon)$ определяет дополнительный вклад в обратное время жизни диффузионных мод:

$$\frac{1}{\tau_{\text{inel}}^{\text{sf}}(\varepsilon)} = \frac{2}{\tau_{\perp}^{\text{sf}}} \operatorname{Re} h^R(\varepsilon) = -\frac{1}{\tau_{\perp}^{\text{sf}}} \left[1 - \frac{b_i}{4T} \left(2 \coth \frac{b_i}{2\pi T} - \tanh \frac{b_i + \varepsilon}{2\pi T} - \tanh \frac{b_i - \varepsilon}{2\pi T} \right) \right]. \quad (2.30)$$

Здесь мы принимаем во внимание, что $\operatorname{Re} h^R(\varepsilon)$ есть четная функция ε . Интересно, что $h^R(\varepsilon)$ также дает мнимую поправку, которая линейна по Ω при $\Omega \rightarrow 0$:

$$\frac{1}{\tau_{\perp}^{\text{sf}}} \left[h^R(\varepsilon_+) + h^R(\varepsilon_-) \right] = \frac{1}{\tau_{\text{inel}}^{\text{sf}}(\varepsilon)} - i(z(\varepsilon) - 1)\Omega + \dots \quad (2.31)$$

Здесь фактор перенормировки частоты дается

$$z(\varepsilon) = 1 + \gamma^{\text{sf}} \frac{b_i}{4\pi T} \sum_{\sigma=\pm} \operatorname{Im} \psi' \left(\frac{1}{2} + \frac{i(b_i + \sigma\varepsilon)}{2\pi T} \right), \quad (2.32)$$

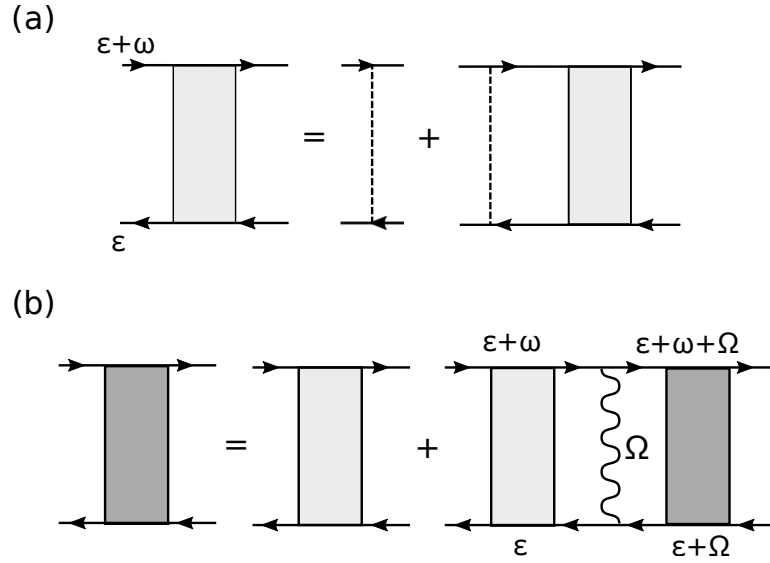


Figure 2.1: Схематичное представление уравнений для диффузионных пропагаторов $\mathcal{D}_p(i\omega)$ (панель (a)) и $\mathcal{D}_p^{(rj)}(i\omega)$ (панель (b)). Сплошная линия обозначает электронную функцию Грина, усредненную по потенциальному беспорядку и с собственно-энергетической поправкой из-за рассеяния на магнитных примесях. Штрихпунктирная линия обозначает рассеяние на потенциальном беспорядке. Волнообразная линия обозначает неупругое рассеяние на магнитных примесях. Энергии Мацубары ε , ω и Ω удовлетворяет следующим условиям: $\varepsilon < 0$, $\varepsilon + \omega > 0$, $\varepsilon + \Omega < 0$, и $\varepsilon + \omega + \Omega > 0$.

где $\gamma^{\text{sf}} = \Gamma^{\text{sf}}/Z_\omega$. В случае $|\varepsilon|, T \ll |b_i|$ фактор перенормировки становится $z(\varepsilon) = 1 + \gamma^{\text{sf}}$, где параметр γ^{sf} дается $\gamma^{\text{sf}} = 1/[\pi(S+1)\tau_{s0}|b_i|] \ll 1$ (см Ур. (2.26)). Заметим, что в случае $|\varepsilon|, T \ll |b_i|$ разложение (2.31) справедливо для $|\Omega| \ll |b_i|$.

Так как в дальнейшем нас интересует режим $|b_e| \ll T \ll |b_i|$, мы пренебрегаем членами со спин-флип и зеемановским расщеплением во второй и третьей строке Ур. (2.22), соответственно. Тогда для частот намного меньших, чем $|b_i|$, мы находим следующий результат для пропагаторов различных диффузионных мод:

$$\begin{aligned}
\langle [w_{rj}(\mathbf{p})]_{n_1 n_2}^{\alpha_1 \alpha_2} [\bar{w}_{rj}(-\mathbf{p})]_{n_4 n_3}^{\alpha_4 \alpha_3} \rangle &= \frac{2}{g} \delta_{n_{12}, n_{34}} \left\{ \delta^{\alpha_1 \alpha_3} \delta^{\alpha_2 \alpha_4} \left[\delta_{n_1 n_3} \mathcal{D}_p(i\Omega_{12}^\varepsilon) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{2\pi T \gamma_j}{D} \delta^{\alpha_1 \alpha_2} (\delta_{r0} + \delta_{r3}) \mathcal{D}_p^{(rj)}(i\Omega_{12}^\varepsilon) \tilde{\mathcal{D}}_p^{(rj)}(i\Omega_{12}^\varepsilon) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{2\pi T \gamma^{\text{sf}}}{D} \delta^{\alpha_1 \alpha_3} \delta^{\alpha_2 \alpha_4} \lambda_r (\delta_{j0} - \delta_{j3}) \mathcal{D}_p(i\Omega_{12}^\varepsilon) \mathcal{D}_p^{(rj)}(i\Omega_{12}^\varepsilon) \right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{2\pi T \gamma^{\text{sf}}}{D} \delta^{\alpha_1 \alpha_2} \delta^{\alpha_3 \alpha_4} \delta_{r3} (\delta_{j1} + \delta_{j2}) \left[\tilde{\mathcal{D}}_p^{(rj)}(i\Omega_{12}^\varepsilon) \right]^2 \right\}. \quad (2.33)
\end{aligned}$$

Где пропагатор

$$[\mathcal{D}_p(i\omega_n)]^{-1} = p^2 + (1 + \gamma^{\text{sf}}) \frac{|\omega_n|}{D} \quad (2.34)$$

описывает “диффузон” (для $r = 0, 3$) и “куперон” (для $r = 1, 2$) в отсутствие электрон-электронного взаимодействия. Коэффициент $1 + \gamma^{\text{sf}}$ возникает в результате учета вкладов собственно-энергетической части из-за рассеяния на магнитных примесях (см. рис. 2.1). Пропагатор

$$[\mathcal{D}_p^{(rj)}(i\omega_n)]^{-1} = p^2 + \left[1 + \gamma^{\text{sf}} - \gamma^{\text{sf}} \lambda_r (\delta_{j0} - \delta_{j3}) \right] \frac{|\omega_n|}{D} \quad (2.35)$$

учитывает вставки вершин рассеяния на магнитных примесях в лестницы “диффузона” и “куперона” (см. рис. 2.1). Взаимодействие электрон-электрон появляется в пропагаторе мод “диффузонов” ($r = 0, 3$), одетых рассеянием электрон-электрон (подробности см. в ссылке [34]):

$$[\tilde{\mathcal{D}}_p^{(rj)}(i\Omega_{12}^\varepsilon)]^{-1} = [\mathcal{D}_p^{(rj)}(i\Omega_{12}^\varepsilon)]^{-1} + \frac{\gamma_j \Omega_{12}^\varepsilon}{D}. \quad (2.36)$$

Для частот больших $|b_i|$ пропагаторы даются Ур. (2.33), при этом γ^{sf} равен нулю.

Отметим, что форма (2.33) пропагаторов диффузионных мод гарантирует, что поляризационный оператор не зависит от рассеяния на магнитных примесях. Действительно, следует ожидать, что собственные энергетические части и вершинные поправки в петле поляризации из-за рассеяния магнитной примеси взаимно сокращаются. Для того, чтобы проверить это, записываем отклик плотность-плотность (приводимый поляризационный оператор относительно кулоновского взаимодействия) следующим образом (см. ссылку [34]):

$$\begin{aligned} \Pi(\mathbf{q}, i\omega_n) = & -\frac{4}{\pi}(Z_\omega + \Gamma_s) \left[1 - \pi T(Z_\omega + \Gamma_s) \right. \\ & \left. \times \langle \text{Tr } I_n^\alpha Q(\mathbf{q}) \text{Tr } I_{-n}^\alpha Q(-\mathbf{q}) \rangle \right]. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Вычисление среднего с помощью Ур. (2.33) в низшем порядке по $1/g$ (это приближение соответствует приближению случайных фаз) приводит к следующему виду поляризационного оператора:

$$\Pi^{\text{RPA}}(\mathbf{q}, i\omega_n) = -\frac{4}{\pi} \frac{Z_\omega(1 + \gamma_s) D q^2}{D q^2 + (1 + \gamma_s) |\omega_n|}. \quad (2.38)$$

Как и ожидалось, параметр γ^{sf} выпадает из выражения для Π^{RPA} в связи с сокращением собственно-энергетической части и вершинных вкладов.

2.3 Вычисление проводимости

В рамках формализма нелинейной сигма-модели статическую проводимость можно рассчитать по следующей формуле Кубо:

$$\begin{aligned} g' = & -\frac{g}{16n} \langle \text{Tr}[J_n^\alpha, Q(\mathbf{r})][J_{-n}^\alpha, Q(\mathbf{r})] \rangle + \frac{g^2}{64dn} \int d\mathbf{r}' \\ & \times \langle \text{Tr } J_n^\alpha Q(\mathbf{r}) \nabla Q(\mathbf{r}) \text{Tr } J_{-n}^\alpha Q(\mathbf{r}') \nabla Q(\mathbf{r}') \rangle, \end{aligned} \quad (2.39)$$

где d означает размерность, предполагается предел $n \rightarrow 0$, и

$$J_n^\alpha = \frac{t_{30} - t_{00}}{2} I_n^\alpha + \frac{t_{30} + t_{00}}{2} I_{-n}^\alpha. \quad (2.40)$$

Среднее значение $\langle \dots \rangle$ в Ур. (2.39) определено по отношению к полному действию $\mathcal{S}_\sigma + \mathcal{S}_{\text{mag}}$. Вычисляя средние в Ур. (2.39) с помощью Ур. (2.33), мы получаем, что проводимость в однопетлевом приближении может быть написана следующим образом.

$$g' = g + \delta g^{\text{wl}} + \delta g^{\text{AA}} + \delta g_1^{\text{sf}} + \delta g_2^{\text{sf}}. \quad (2.41)$$

Где δg^{wl} представляет собой интерференционную поправку. Она имеет стандартную форму[94, 37, 29]:

$$\delta g^{\text{wl}} = \sum_{r=1,2} \sum_j (2\delta_{j0} - 1) \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^d} \mathcal{D}_p^{(rj)}(0). \quad (2.42)$$

Так как поправка слабой локализации включает в себя “куперонные” моды на нулевой частоте, рассеяние со спин-флип влияет на δg^{wl} только через время жизни “куперонных” мод (подробнее см. ссылку [43]).

Следующий член, δg^{AA} , в правой части Ур. (2.41) - это поправка Альтшулера-Аронова из-за с электрон-электронного взаимодействия [8, 32, 31]:

$$\begin{aligned} \delta g^{\text{AA}} = & \frac{128\pi T}{ngd} \sum_{r=0,3} \sum_j \Gamma_j \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^d} p^2 \sum_{m>0} \min\{m, n\} \\ & \times \mathcal{D}_p^{(rj)}(i\omega_m) \tilde{\mathcal{D}}_p^{(rj)}(i\omega_m) \mathcal{D}_p(i\omega_{m+n}). \end{aligned} \quad (2.43)$$

Здесь предполагается предел $n \rightarrow 0$. Подчеркнем, что для $|\omega_m| \ll |b_i|$ спин-флип рассеяние *входит* в выражение для δg^{AA} через коэффициенты перенормировки частоты в диффузионном пропагаторе. Отметим, что поправка Альтшулера-Аронова включает в себя три типа пропагаторов диффузионных мод (см. рис. 2.2).

Выполняя аналитическое продолжение на реальные частоты, $i\omega_n \rightarrow \omega + i0$, и беря предел $\omega \rightarrow 0$ мы получаем следующий результат

$$\begin{aligned} \delta g^{\text{AA}} = & \frac{64}{gd} \text{Im} \sum_j \Gamma_j \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^d} p^2 \int d\Omega \partial_\Omega \left(\Omega \coth \frac{\Omega}{2T} \right) \\ & \times \mathcal{D}_p^R(\Omega) \mathcal{D}_p^{(0j),R}(\Omega) \tilde{\mathcal{D}}_p^{(0j),R}(\Omega). \end{aligned} \quad (2.44)$$

Здесь мы учли, что диффузионные пропагаторы с $r = 0$ и $r = 3$ совпадают. Пропагаторы $\mathcal{D}_p^R(\Omega)$, $\mathcal{D}_p^{(rj),R}(\Omega)$ и $\tilde{\mathcal{D}}_p^{(rj),R}(\Omega)$ обозначает запаздывающие пропагаторы, соответствующие $\mathcal{D}_p(i\Omega)$, $\mathcal{D}_p^{(rj)}(i\Omega)$, и $\tilde{\mathcal{D}}_p^{(rj)}(i\Omega)$, соответственно.

Далее, есть следующая поправка из-за неупругого спин-флип-рассеяния:

$$\begin{aligned} \delta g_1^{\text{sf}} = & -\frac{64\pi T \Gamma^{\text{sf}}}{ng} \sum_{j=0,3} (-1)^j \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^d} \sum_{m>0} m \mathcal{D}_p(i\omega_{m+n}) \\ & \times \sum_{r=0,3} \mathcal{D}_p^{(rj)}(i\omega_{m+n}) \left[1 - p^2 \left[\mathcal{D}_p(i\omega_m) \right. \right. \\ & \left. \left. + \mathcal{D}_p(i\omega_{m+2n}) \right] \right]. \end{aligned} \quad (2.45)$$

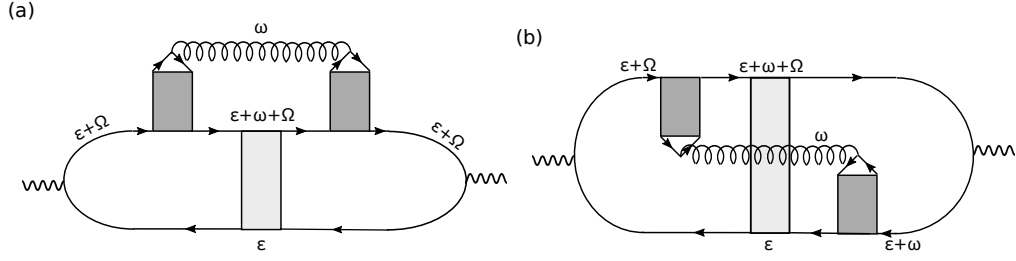


Figure 2.2: Эскиз диаграмм, вносящих вклад в поправку Альтшулера-Аронова. Пружиноподобная линия обозначает электрон-электронное взаимодействие. Остальные элементы имеют то же значение, что и на предыдущем рисунке.

Напоминаем, что предполагается предел $n \rightarrow 0$. На первый взгляд кажется, что этот предел не конечен, так что поправка δg_1^{sf} нарушает калибровочную инвариантность. Однако, учитывая, что пропагаторы диффузии $\mathcal{D}^{(rj)}$ одинаковы для $r = 0$ и $r = 3$, мы можем переписать эту поправку δg_1^{sf} как сумму двух поправок, $\delta g_1^{\text{sf}} = \delta g_{1,\omega}^{\text{sf}} + \delta g_{1,f}^{\text{sf}}$, где $\delta g_{1,\omega}^{\text{sf}}$, как кажется, не имеет конечного предела при $n \rightarrow 0$, а $\delta g_{1,f}^{\text{sf}}$ имеет гладкий предел при $n \rightarrow 0$. В частности, мы находим

$$\delta g_{1,\omega}^{\text{sf}} = \frac{2}{dn} \sum_{j=0,3} \sum_{m>0} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^d} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \ln \frac{\mathcal{D}_p(i\omega_m)}{\mathcal{D}_p^{(0j)}(i\omega_m)}. \quad (2.46)$$

Так как $\delta g_{1,\omega}^{\text{sf}}$ имеет форму второй производной по импульсу эта поправка определяется ультрафиолетом низкоэнергетической эффективной теории. Поэтому мы не можем аккуратно вычислить ее в рамках подхода нелинейной сигма-модели. Однако эта поправка второго порядка по γ^{sf} , поэтому ее учет является избытком точности.

После аналитического продолжения на реальные частоты, $i\omega_n \rightarrow \omega + i0$, и с учетом предела $\omega \rightarrow 0$ конечную поправку $\delta g_{1,f}^{\text{sf}}$ можно записать как

$$\delta g_{1,f}^{\text{sf}} = \frac{1}{d} \text{Re} \sum_{j=0,3} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^d} p^2 \int d\Omega \partial_\Omega \left(\coth \frac{\Omega}{2T} \right) \times \left[\mathcal{D}_p^R(\Omega) - \mathcal{D}_p^{(0j),R}(\Omega) \right]^2. \quad (2.47)$$

Последняя поправка в Ур. (2.41) также обусловлена неупругим спин-флип-рассеянием, представленным последним членом в Ур. (2.33). Она имеет следующую форму:

$$\begin{aligned} \delta g_2^{\text{sf}} = & \frac{128\pi T \Gamma^{\text{sf}}}{ngd} \sum_{j=1,2} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^d} p^2 \sum_{m>0} \min\{m, n\} \\ & \times \left[\tilde{\mathcal{D}}_p^{(3j)}(i\omega_m) \right]^2 \mathcal{D}_p(i\omega_{m+n}). \end{aligned} \quad (2.48)$$

Здесь, опять же, предполагается предел $n \rightarrow 0$. Диаграммно эта поправка имеет структуру, подобную диаграммам, показанным на Рис. 2.2, в которой линия электрон-электронного взаимодействия должна быть заменена динамической спиновой восприимчивостью. Выполняя аналитическое продолжение на реальные частоты, $i\omega_n \rightarrow \omega + i0$, и принимая предел $\omega \rightarrow 0$, получаем следующий результат

$$\begin{aligned} \delta g_2^{\text{sf}} = & \frac{64\Gamma^{\text{sf}}}{gd} \text{Im} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^d} p^2 \int d\Omega \partial_\Omega \left(\Omega \coth \frac{\Omega}{2T} \right) \\ & \times \left[\tilde{\mathcal{D}}_p^{(31),R}(\Omega) \right]^2 \mathcal{D}_p^R(\Omega). \end{aligned} \quad (2.49)$$

При этом учитывалась эквивалентность пропагаторов диффузии $j = 1$ и $j = 2$. Стоит отметить, что в поправке δg^{sf} задействованы триплетные диффузионные моды с суммарной спиновой проекцией равной ± 1 . Отметим, что поправка (2.49) аналогична квантовой поправке за счет электронно-парамагнитного рассеяния [70].

2.4 Логарифмическая поправка к проводимости из-за неупругого спин-флип рассеяния

Как мы упоминали выше, в этой главе мы сосредоточимся на случае $T \ll |b_i|$. Также нас интересуют поправки второго порядка по J и в двумерном случае. Тогда, разлагая поправку (2.44) до первого порядка

по γ^{sf} , находим

$$\begin{aligned}
\delta g^{\text{AA}} = & -\frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^3 \left[1 - \frac{1 + \gamma_j}{\gamma_j} \ln(1 + \gamma_j) \right] \ln \frac{1}{2\pi T \tau} \\
& - \frac{\gamma^{\text{sf}}}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\gamma_s} - \frac{1 + \gamma_s}{\gamma_s^2} \ln(1 + \gamma_s) \right] \ln \frac{|b_i|}{2\pi T} \\
& - \frac{2\gamma^{\text{sf}}}{\pi} \left[1 - \frac{1}{\gamma_t} \ln(1 + \gamma_t) \right] \ln \frac{|b_i|}{2\pi T} \\
& - \frac{\gamma^{\text{sf}}}{\pi} \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{\gamma_t} + \frac{1 - \gamma_t}{\gamma_t^2} \ln(1 + \gamma_t) \right] \ln \frac{|b_i|}{2\pi T}. \quad (2.50)
\end{aligned}$$

Здесь в первой строке представлена стандартная поправка Альтшулера-Аронова к проводимости. Поскольку соответствующий вклад существует для частот больше $|b_i|$, то ультрафиолетовая обрезка для этой поправки - обратное время свободного пробега $1/\tau$. Во второй строке описывается поправка, обусловленная эффектом неупругого рассеяния на магнитных примесях в синглетном канале частица-дырка. Третья строка соответствует поправки от триплетного канала частица-дырка с общей спиновой проекцией равной ± 1 . Четвертая строка описывает поправку триплетного канала частица-дырка с нулевой суммарной спиновой проекцией. Отметим, что поправки, пропорциональные γ^{sf} , включают $\ln(|b_i|/2\pi T)$ и исчезают при отсутствии электрон-электронного взаимодействия. Мы упоминаем, что в стандартной поправке Альтшулера-Аронова (первая строка из Ур. (2.50)) синглетный канал благоприятствует локализации (так как $\gamma_s \leq 0$), в то время как триплетный канал благоприятствует антилокализации (так как $\gamma_t \geq 0$) при низкой температуре. Поправки, пропорциональные γ^{sf} , работают в обратном направлении, т.е. наличие неупругого рассеяния на магнитных примесях уменьшает эффект локализации (антилокализации) в каналах синглета (триплета) соответственно.

Поправка (2.47) не производит логарифмических выражений, так как интеграл по частотам ограничен $|\Omega| \lesssim T$. Другая поправка из-за неупругого рассеяния, Ур. (2.49)

$$\delta g_2^{\text{sf}} = \frac{\gamma^{\text{sf}}}{\pi \gamma_t} \left[1 - \frac{1}{\gamma_t} \ln(1 + \gamma_t) \right] \ln \frac{|b_i|}{2\pi T}. \quad (2.51)$$

Мы отмечаем, что эта поправка является положительной, т.е. работает в пользу антилокализации при низких температурах. В отсутствие электрон-электронного взаимодействия δg_2^{sf} является единственной

поправкой к проводимости из-за неупругого рассеяния на магнитных примесях. Она приобретает следующую форму:

$$\delta g_2^{\text{sf}} \rightarrow \frac{\gamma^{\text{sf}}}{2} \ln \frac{|b_i|}{2\pi T} = \frac{1}{2\pi(S+1)\tau_{s0}|b_i|} \ln \frac{|b_i|}{2\pi T}. \quad (2.52)$$

Эта квантовая поправка работает в противоположном направлении по отношению к слабой локализации.

2.5 Заключение

Зависящие от температуры поправки к проводимости, рассмотренные выше, были получены в рамках приближения Борна для рассеяния на магнитных примесях. Напомним, что стандартная поправка Кондо к проводимости в чистой системе появляется за пределами приближения Борна: в третьем порядке по обменному взаимодействию. В случае $T \ll |b_i|$ эта поправка не зависит от температуры, т.к. инфракрасная обрезка для логарифма Кондо дается не T , а $|b_i|$. В неупорядоченном случае неупругие поправки к проводимости, изученные ранее [69, 68, 85], также были третьего порядка по обменному взаимодействию. Поскольку поправки (2.50) и (2.51) относятся ко второму порядку, то они более важны для достаточно маленьких νJ . Отметим, что поправки третьего порядка по J для случая $|b_e| \ll T \ll |b_i|$ еще не вычислены. Поэтому количественно сравнить поправки второго и третьего порядка мы не можем.

В отсутствие электрон-электронного взаимодействия структура поправки (2.49) аналогична поправке к проводимости неупорядоченной электронной системы в диффузионном пределе за счет электрон-электронного взаимодействия, создаваемого неупругим рассеянием на парамагнетонах [70]. Различие между парамагнетонами и магнитными примесями заключается в форме наведенного электрон-электронного взаимодействия. В последнем случае оно является короткодействующим и не зависит от передаваемой частоты для малых частот. Вдали от точки ферромагнитного квантового фазового перехода индуцированное парамагнетонами электрон-электронное взаимодействие также становится импульсно-частотно-независимым и, следовательно, приводит к логарифмической поправке к проводимости в двух измерениях [70].

В этой главе мы рассмотрели случай электронной системы в отсутствие спин-орбитального взаимодействия. Если спин-орбитальное взаимодействие присутствует, то оно отсекает диффузионные полюса

триплетных диффузонов. Таким образом, это приводит к подавлению температурной зависимости поправки (2.51) и вкладов, которые включают γ_t в Ур. (2.50). Единственный зависящий от температуры вклад, обусловленный неупругим рассеянием на магнитных примесях, который остается в случае спин-орбитальной связи, - это член во второй строке Ур. (2.50), который описывает модификацию поправки Альтшулера-Аронова в синглетном канале.

Экспериментально влияние магнитных примесей на поправку слабой локализации через время дефазировки, индуцированное спин-флип-рассеянием, интенсивно изучалось в двумерных электронных системах на протяжении многих десятилетий, начиная с фундаментальных работ [71, 39]. Нам неизвестны систематические экспериментальные исследования влияния магнитных примесей на поправку Альтшулера-Аронова к проводимости в двумерных электронных системах. В целом, четкое разделение интерференции и поправки за счет взаимодействия является сложной экспериментальной задачей (см., например, последние работы [64, 63, 62]). Очевидно, что эффекты, описанные в настоящей главе, и дальше усложняют эту задачу.

Отметим, что потенциальное рассеяние влияет также на спиновую восприимчивость магнитной примеси, что приводит к дополнительным (по отношению к обычной ренормализации Кондо) температурно-зависимым поправкам [69, 14, 86]. Поэтому было бы интересно рассмотреть поправки к спиновой восприимчивости магнитной примеси в случае различных g -факторов и при наличии электрон-электронного взаимодействия.

Подводя итог, мы изучили квантовые поправки к проводимости, возникающие из-за неупругого рассеяния на магнитных примесях в двумерной неупорядоченной взаимодействующей электронной системе в диффузном пределе. В отличие от предыдущих работ, (i) мы рассмотрели случай различных g -факторов для электронов и магнитных примесей, $|g_e| \ll |g_i|$; (ii) мы сосредоточились на промежуточном диапазоне температур $|g_e|\mu_B H \ll T \ll |g_i|\mu_B H$; (iii) мы приняли во внимание электрон-электронное взаимодействие в канале "частица-дырка". Мы обнаружили, что в приближении Борна неупругое рассеяние на магнитных примесях приводит к дополнительной температурозависимой поправке к проводимости (ср. Ур. (2.51)). Также неупругое рассеяние изменяет поправку Альтшулера-Аронова к проводимости (ср. с публикацией (2.50)). Наши предсказания представляют задачу для экспериментальных исследований низкотемпературного электронного транспорта в неупорядоченных системах с редкими магнитными примесями.

Глава 3

Собственные операторы ренормгруппы сигма-модели Финкельштейна

В этой главе, используя двухпетлевой анализ и метод перенормировки фонового поля, мы показываем, что локальные операторы чистого скейлинга без производных в нелинейной сигма-модели Финкельштейна могут быть построены простым обобщением соответствующих операторов для не взаимодействующего случая. Эти операторы чистого скейлинга демонстрируют мультифрактальное поведение и описывают мезоскопические флуктуации одночастичной функции Грина. Аномальные размерности всех таких операторов чистого скейлинга мы определяем в теории взаимодействия в двухпетлевом приближении.

3.1 Формализм нелинейной сигма-модели

Эффективная теория поля в случае симметрии вращения спина и обращения времени определяется стандартным образом [34, 17]. Она формулируется для матричного поля Q , которое принимает значения в симметрическом пространстве G/K с $G = \text{Sp}(2N)$ и $K = \text{Sp}(N) \times \text{Sp}(N)$. Ранг симплектической группы дается выражением $N = 4N_r N_m$, где N_r обозначает количество реплик, а N_m - количество задействованных частот Мацубары. Коэффициент 4 соответствует спину и пространству Намбу (дырка-частица). Эффективное действие может быть написано следующим образом

$$S = -\frac{g}{32} \int d\mathbf{r} \operatorname{Tr}(\nabla Q)^2 + 4\pi T Z_\omega \int d\mathbf{r} \operatorname{Tr} \eta Q - \frac{\pi T}{4} \sum_{\alpha, n, r, j} \Gamma_j \int d\mathbf{r} \operatorname{Tr} \left[I_n^\alpha t_{rj} Q \right] \operatorname{Tr} \left[I_{-n}^\alpha t_{rj} Q \right]. \quad (3.1)$$

Здесь мы ввели следующие матрицы

$$\eta_{nm}^{\alpha\beta} = n \delta_{nm} \delta^{\alpha\beta} t_{00}, \quad (I_k^\gamma)_{nm}^{\alpha\beta} = \delta_{n-m, k} \delta^{\alpha\beta} \delta^{\alpha\gamma} t_{00}, \quad (3.2)$$

где $\alpha, \beta = 1, \dots, N_r$ означают индексы реплик, а индексы n, m соответствуют мацубаровским фермионным частотам $\varepsilon_n = \pi T(2n+1)$ (T означает температуру.). Шестнадцать матриц t_{rj} действуют в тензорном произведении спинового (индекс j) и Намбу (индекс r) пространств. Индексы r и j матриц t_{rj} означают разложение по базису тензорных произведений единицы и матриц Паули в этих пространствах, т.е.

$$t_{rj} = \tau_r \otimes s_j, \quad r, j = 0, 1, 2, 3. \quad (3.3)$$

Где матрицы τ_0 и s_0 означают единичные 2×2 матрицы и

$$\tau_1/s_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2/s_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3/s_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Полная (включая спин) безразмерная (в единицах e^2/h) проводимость Друде обозначается g . Амплитуды взаимодействия Γ_j (для синглетного канала $\Gamma_0 = \Gamma_s$, а для триплетного канала $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = \Gamma_t$) описывают электрон-электронное взаимодействие в канале "частица-дырка". В этой главе мы пренебрегаем взаимодействием в куперовском канале. Параметр Z_ω учитывает нетривиальную перенормировку частоты при ренормгрупповом потоке [32]. Затравочным значением Z_ω является единица. Для вычисления физических наблюдаемых с действием NLMS (3.1) необходимо взять два предела: $N_m \rightarrow \infty$ и $N_r \rightarrow 0$. Мы отмечаем, что первый предел является нетривиальным и должен выполняться в соответствии с калибровочной инвариантностью (подробнее см. ссылку [15]).

Матрица $Q(\mathbf{r})$ описывает локальные вращения вокруг пространственно независимой матрицы Λ :

$$Q = \mathcal{T}^{-1} \Lambda \mathcal{T}, \quad \Lambda_{nm}^{\alpha\beta} = \operatorname{sgn} \varepsilon_n \delta_{nm} \delta^{\alpha\beta} t_{00}, \quad (3.4)$$

где матрицы $\mathcal{T} \in G$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$C(\mathcal{T}^{-1})^\top = \mathcal{T} C, \quad \mathcal{T}^\top C = C \mathcal{T}^{-1} \quad (3.5)$$

Где $C = it_{12}$ и \mathcal{T}^T означает матричное транспонирование \mathcal{T} . Таким образом, матрица Q удовлетворяет локальной нелинейной связи $Q^2(\mathbf{r}) = 1$, условию $\text{Tr} Q = 0$ и условию зарядового сопряжения

$$Q = Q^\dagger = C^T Q^T C. \quad (3.6)$$

3.2 Локальные операторы без производных

Простейшие локальные операторы без производных даются

$$\mathcal{K}_1(E) = \frac{1}{4} \text{Re} \mathcal{P}_1^+(E), \quad (3.7)$$

где запаздывающая корреляционная функция $\mathcal{P}_1^+(E)$ может быть получена из ее мацубаровского аналога

$$\mathcal{P}_1(i\varepsilon_n) = \text{sp} \langle Q_{nn}^{\alpha\alpha} \rangle \quad (3.8)$$

после стандартного аналитического продолжения, $i\varepsilon_n \rightarrow E + i0^+$. Здесь символ sp обозначает след по спину и пространству Намбу. Сумма по репличному индексу α не подразумевается. Физически $\mathcal{K}_1(E)$ соответствует усредненной по беспорядку LDOS:

$$\mathcal{K}_1(E) = \frac{\langle \rho(E) \rangle_{\text{dis}}}{\rho_0}, \quad \rho(E) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} G_E^+(\mathbf{r}, \mathbf{r}). \quad (3.9)$$

Здесь $G_E^+(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ - это одночастичная функция Грина для данной реализации беспорядка. Величина ρ_0 обозначает плотность состояний (включая спин) на энергии $E \sim 1/\tau$. Отметим, что энергия E отсчитывается от уровня Ферми. Поскольку $\mathcal{K}_1(E)$ представляет собой усредненную по беспорядку плотность состояний, неудивительно, что это оператор чистого скейлинга под действием группы перенормировки.

Локальный оператор без производных, в котором задействованы две матрицы Q , можно записать следующим образом

$$\mathcal{K}_2(E_1, E_2) = \frac{1}{64} \sum_{p_1, p_2 = \pm} p_1 p_2 \mathcal{P}_2^{\alpha_1 \alpha_2; p_1 p_2}(E_1, E_2). \quad (3.10)$$

Здесь корреляционная функция $\mathcal{P}_2^{\alpha_1 \alpha_2; p_1 p_2}(E_1, E_2)$ может быть получена из корреляционной функции Мацубары

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_2^{\alpha_1 \alpha_2}(i\varepsilon_{n_1}, i\varepsilon_{n_2}) &= \langle \text{sp} Q_{n_1 n_1}^{\alpha_1 \alpha_1}(\mathbf{r}) \text{sp} Q_{n_2 n_2}^{\alpha_2 \alpha_2}(\mathbf{r}) \rangle \\ &+ \mu_2 \langle \text{sp} [Q_{n_1 n_2}^{\alpha_1 \alpha_2}(\mathbf{r}) Q_{n_2 n_1}^{\alpha_2 \alpha_1}(\mathbf{r})] \rangle \end{aligned} \quad (3.11)$$

стандартным аналитическим продолжением на реальные частоты: $\varepsilon_{n_1} \rightarrow E_1 + ip_1 0^+$ и $\varepsilon_{n_2} \rightarrow E_2 + ip_2 0^+$. Здесь α_1 и α_2 - два разных фиксированных репличных индекса. Оператор $\mathcal{K}_2(E_1, E_2)$ параметризован вещественным числом μ_2 . Для $\mu_2 = -2$ данный оператор описывает двухточечную корреляционную функцию LDOS, усредненную по реализации беспорядка:

$$\mathcal{K}_2(E_1, E_2) \Big|_{\mu_2=-2} = \rho_0^{-2} \langle \rho(E_1, \mathbf{r}) \rho(E_2, \mathbf{r}) \rangle_{\text{dis}}. \quad (3.12)$$

Недавно в двухпетлевом приближении в NLSM Финкельштейна было показано, что оператор $\mathcal{K}_2(E_1, E_2)$ в случае $\mu_2 = -2$ является оператором чистого скейлинга [23].

Общий оператор, который включает в себя q штук матричных полей Q , может быть определен как

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_q(E_1, \dots, E_q) &= \frac{1}{2^{3q}} \sum_{p_1, \dots, p_q = \pm} \left(\prod_{j=1}^q p_j \right) \\ &\times \mathcal{P}_q^{\alpha_1, \dots, \alpha_q; p_1, \dots, p_q}(E_1, \dots, E_q). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Здесь $\mathcal{P}_q^{\alpha_1, \dots, \alpha_q; p_1, \dots, p_q}(E_1, \dots, E_q)$ можно получить из корреляционной функции в мнимом времени

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_q^{\alpha_1, \dots, \alpha_q}(i\varepsilon_{n_1}, \dots, i\varepsilon_{n_q}) &= \sum_{\{k_1, \dots, k_q\}} \mu_{k_1, \dots, k_q} \langle \mathcal{A}_{k_1, \dots, k_q} \rangle, \\ \mathcal{A}_{k_1, \dots, k_q} &= \prod_{r=k_1}^{k_q} \text{sp} [Q_{n_{j_1} n_{j_2}}^{\alpha_{j_1} \alpha_{j_2}} Q_{n_{j_2} n_{j_3}}^{\alpha_{j_2} \alpha_{j_3}} \dots Q_{n_{j_r} n_{j_1}}^{\alpha_{j_r} \alpha_{j_1}}], \end{aligned} \quad (3.14)$$

после аналитического продолжения на реальные частоты: $\varepsilon_{n_j} \rightarrow E_j + ip_j 0^+$. Сумма в Ур. (3.14) выполняется по разбиениям q , т.е. по всем наборам положительных целых чисел $\{k_1, \dots, k_q\}$, которые удовлетворяют следующим условиям: $k_1 + k_2 + \dots + k_q = q$ и $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_q > 0$. По индексам реплик, которые все считаются разными, нет суммы, $\alpha_j \neq \alpha_k$, если $j \neq k$ для $j, k = 1, \dots, q$. Далее мы выбираем такую нормировку, что $\mu_{1,1,1, \dots, 1} = 1$.

При отсутствии взаимодействия, $\Gamma_j = 0$, действие NLSM уменьшается до первой строки в Ур. (3.1). Так как энергия диффузионных мод сохраняется без взаимодействий, можно спроецировать матрицу Q подпространство 2×2 двух заданных положительных и отрицательных частот Мацубары. Таким образом, группа G уменьшается до

$\tilde{G} = \text{Sp}(8N_r)$ и эффективное действие становится K -инвариантным, т.е. инвариантным при вращениях $Q \rightarrow U^{-1}QU$ с $U \in \tilde{K} = \text{Sp}(4N_r) \times \text{Sp}(4N_r)$. Тогда операторы \mathcal{K}_q можно усреднить по вращениям U , а результирующие операторы-инварианты по K можно классифицировать по неприводимым представлениям \tilde{G} . Каждое неприводимое представление будет содержать единственный K -инвариантный оператор чистого скейлинга [42, 38]. Отметим, что (i) приведенная выше классификация может быть выполнена для произвольного числа копий N_r и (ii) можно работать и с K -неинвариантными операторами.

При наличии взаимодействий применение описанной выше схемы затруднено следующими причинами. Во-первых, действие NLSM Финкельштейна не является K -инвариантным. Во-вторых, классификация операторов \mathcal{K}_q по неприводимым представлениям группы G далеко не очевидна из-за предела $N_m \rightarrow \infty$. В связи с этим для фиксации наборов коэффициентов μ_{k_1, \dots, k_q} , соответствующих операторам чистого скейлинга, мы используем двухпетлевую процедуру перенормировки.

3.3 Двухпетлевая перенормировка \mathcal{K}_q

Для нахождения набора коэффициентов μ_{k_1, \dots, k_q} , которые соответствуют оператору чистого скейлинга \mathcal{K}_q , выполняется двухпетлевая перенормировка оператора \mathcal{K}_q . Как известно, при такой пертурбативной (по $1/g$) процедуре встречаются расходимости. Для регуляризации квантовой теории в действии NLSM добавляем массовый член (3.1):

$$S \rightarrow S_h = S + \frac{gh^2}{8} \int d\mathbf{r} \text{Tr} \Lambda Q. \quad (3.15)$$

Кроме того, воспользуемся схемой размерной регуляризации и будем работать в размерности $d = 2 + \epsilon$.

Для пертурбативного анализа (по $1/g$) действия (3.1) необходимо разрешить нелинейную связь $Q^2(\mathbf{r}) = 1$. Для этого мы будем использовать квадратичную параметризацию

$$Q = W + \Lambda \sqrt{1 - W^2}, \quad W = \begin{pmatrix} 0 & w \\ \bar{w} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

В дальнейшем мы используем следующие обозначения: $W_{nm} = w_{nm}$ и $W_{mn} = \bar{w}_{mn}$ где $n \geq 0$ и $m < 0$. Два блока матрицы W связаны

следующим образом

$$\bar{w} = -Cw^T C, \quad w = -Cw^* C. \quad (3.17)$$

раскладывая действие S_h по W до второго порядка, мы получаем следующие пропагаторы диффузных мод. Для $r = 0, 3$ и $j = 0, 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} \left\langle [w_{rj}(\mathbf{p})]_{n_1 m_1}^{\alpha_1 \beta_1} [\bar{w}_{rj}(-\mathbf{p})]_{m_2 n_2}^{\beta_2 \alpha_2} \right\rangle &= \frac{2}{g} \delta^{\alpha_1 \alpha_2} \delta^{\beta_1 \beta_2} \delta_{n_{12}, m_{12}} \\ &\times \mathcal{D}_p(i\Omega_{nm}^\varepsilon) \left[\delta_{n_1 n_2} - \frac{32\pi T \Gamma_j}{g} \delta^{\alpha_1 \beta_1} \mathcal{D}_p^{(j)}(i\Omega_{nm}^\varepsilon) \right], \end{aligned} \quad (3.18)$$

где $n_{12} = n_1 - n_2$, $m_{12} = m_1 - m_2$, $\Omega_{nm}^\varepsilon = \varepsilon_{n_1} - \varepsilon_{m_1} \equiv \varepsilon_{n_2} - \varepsilon_{m_2}$, и $w_{rj} = \text{sp}[wt_{rj}]/4$. Пропагатор (3.18) зависит от стандартного диффузона

$$\mathcal{D}_p^{-1}(i\omega_n) = p^2 + h^2 + 16Z_\omega |\omega_n|/g \quad (3.19)$$

и диффузонов, перенормированных взаимодействием в синглетном ($\mathcal{D}_p^{(0)}(\omega) \equiv \mathcal{D}_p^s(\omega)$) и триплетном ($\mathcal{D}_p^{(1)}(\omega) = \mathcal{D}_p^{(2)}(\omega) = \mathcal{D}_p^{(3)}(\omega) \equiv \mathcal{D}_p^t(\omega)$) каналах:

$$[\mathcal{D}_p^{s/t}(i\omega_n)]^{-1} = p^2 + h^2 + 16(Z_\omega + \Gamma_{s/t}) |\omega_n|/g. \quad (3.20)$$

Пропагаторы мод с $r = 1, 2$ и $j = 0, 1, 2, 3$ (купероны) совпадают со стандартными диффузонами в отсутствие взаимодействия в куперовском канале:

$$\begin{aligned} \left\langle [w_{rj}(\mathbf{p})]_{n_1 m_1}^{\alpha_1 \beta_1} [\bar{w}_{rj}(-\mathbf{p})]_{m_2 n_2}^{\beta_2 \alpha_2} \right\rangle &= \frac{2}{g} \delta^{\alpha_1 \alpha_2} \delta^{\beta_1 \beta_2} \delta_{n_1 n_2} \\ &\times \delta_{m_1 m_2} \mathcal{D}_p(i\Omega_{nm}^\varepsilon). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Сначала напомним известные результаты однопетлевой перенормировки. Усредненная по беспорядку LDOS при $T = E = 0$ может быть записана как [25]:

$$\frac{\langle \rho(E = 0) \rangle_{\text{dis}}}{\rho_0} = \sqrt{Z}, \quad Z = 1 - \frac{h^\varepsilon t}{\varepsilon} \sum_{j=0}^3 \ln(1 + \gamma_j). \quad (3.22)$$

Где мы вводим $\gamma_j = \Gamma_j/Z_\omega$ и безразмерное сопротивление $t = 8\Omega_d/g$ где $\Omega_d = 1/[2^d \pi^{d/2} \Gamma(d/2)]$ ($t = 2/(\pi g)$ при $d = 2$). Перенормированный кондактанс дается [8, 10, 31, 33, 25]

$$g' = g \left[1 + \frac{a_1 t h^\varepsilon}{\varepsilon} \right], \quad a_1 = 1 + \sum_{j=0}^3 f(\gamma_j), \quad (3.23)$$

где

$$f(\gamma) = 1 - (1 + 1/\gamma) \ln(1 + \gamma). \quad (3.24)$$

Важно будет также учесть перенормировку масштаба импульса h [16]. Соответствующий перенормированный масштаб импульса h' связан с h следующим образом $g'h'^2 = gh^2 Z^{1/2}$. В рамках однопетлевого приближения можно найти [16].

$$h' = h \left\{ 1 - \frac{t h^\epsilon}{2\epsilon} \left[1 + \sum_{j=0}^3 [f(\gamma_j) + \frac{1}{2} \ln(1 + \gamma_j)] \right] \right\}. \quad (3.25)$$

Чтобы найти перенормировку оператора \mathcal{K}_q в двухпетлевом приближении удобно рассмотреть его неприводимую часть $\tilde{\mathcal{K}}_q$, которую можно получить из определения (3.14) путем замены $Q \rightarrow Q - \langle Q \rangle$. Отсюда и далее $\langle \dots \rangle$ означает усреднение по отношению к действию S_h . Этот трюк позволяет использовать только однопетлевое выражение (3.22) для Z . Дополнительной причиной работы с неприводимым оператором $\tilde{\mathcal{K}}_q$ является то, что для $q \geq 5$ двухпетлевой вклад в него исчезает. Так как двухпетлевое вычисление является стандартным и очень близко к тому, что представлено в Ref. [23], здесь мы представляем конечный результат. Необходимые технические подробности приведены в приложении 4.3. В рамках двухпетлевого приближения приводимый оператор \mathcal{K}_q может быть записан в следующем виде при $T = 0$.

$$\mathcal{K}_q(E_1 = 0, \dots, E_q = 0) = Z^{q/2} m'_q, \quad q \geq 2. \quad (3.26)$$

где

$$m'_q = m_q \left[1 + \frac{b_1 t h^\epsilon}{\epsilon} + \frac{t^2 h'^{2\epsilon}}{\epsilon^2} (b_2 + \epsilon b_3) \right], \quad (3.27)$$

где $m_q = 1$ в связи с конвенцией нормировки для операторов \mathcal{K}_q . Коэффициенты $b_{1,2,3}$ зависят от параметров взаимодействия γ_j и коэффициентов μ_{k_1, \dots, k_q} :

$$\begin{aligned} b_1 &= \mu_{2,1,1,\dots,1}, & b_3 &= \mu_{2,1,1,\dots,1} \sum_{j=0}^3 c(\gamma_j)/4, \\ b_2 &= q(q-1)/2 + 3\mu_{3,1,1,\dots,1}/2 + \mu_{2,2,1,\dots,1} - \mu_{2,1,1,\dots,1} \\ &\quad - \mu_{2,1,1,\dots,1} \sum_{j=0}^3 f(\gamma_j)/2. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Функция

$$c(\gamma) = 2 + \frac{2 + \gamma}{\gamma} \operatorname{li}_2(-\gamma) + \frac{1 + \gamma}{2\gamma} \ln^2(1 + \gamma) \quad (3.29)$$

включает в себя полилогарифм $\operatorname{li}_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^k/k^2$. Обращаем внимание, что $\mu_{3,1,1,1,\dots,1} = 0$ для $q = 2$ и $\mu_{2,2,1,\dots,1} = 0$ для $q = 2, 3$. Применение схемы минимального вычитания (см., например [12]) к Ур. (3.27), можно получить аномальную размерность m'_q . Для того, чтобы она была конечной в пределе $\epsilon \rightarrow 0$, необходимо выполнить условие $b_2 = b_1(b_1 - a_1)/2$. Как следует из Ур. (3.28) это условие эквивалентно следующему уравнению для коэффициентов

$$\mu_{2,1,\dots,1}^2 + \mu_{2,1,\dots,1} = 3\mu_{3,1,\dots,1} + 2\mu_{2,2,\dots,1} + q(q - 1). \quad (3.30)$$

Так как оператор чистого скейлинга \mathcal{K}_q должен иметь хорошо определенную аномальную размерность, Ур. (3.30) должно выполняться для набора коэффициентов μ_{k_1,\dots,k_q} . Более того, поскольку Ур. (3.30) является нелинейным для $\mu_{2,1,\dots,1}$, в общем, его невозможно удовлетворить коэффициентами μ_{k_1,\dots,k_q} , которые соответствуют линейным комбинациям двух операторов чистого скейлинга. Удивительно, но уравнение (3.30) не зависит от параметров взаимодействия γ_s и γ_t . Это означает, что Ур. (3.30) выполняется наборами $\{\mu_{k_1,\dots,k_q}\}$, определяющими операторы чистого скейлинга в теории без взаимодействия [42, 96, 97]. Для $q = 2, 3$ и 4 мы приводим в таблице 3.1 наборы $\{\mu_{k_1,\dots,k_q}\}$, соответствующие операторам чистого скейлинга. Как можно проверить, они действительно удовлетворяют Ур. (3.30). Упомянем, что для $q = 2$ Ур. (3.30) позволяет определить возможные значения коэффициента μ_2 (равного -2 и 1) и, следовательно, найти все возможные операторы чистого скейлинга при $q = 2$. Для того чтобы определить все коэффициенты $\{\mu_{k_1,\dots,k_q}\}$ для $q \geq 3$, необходимо проанализировать следующие порядки в петлевом разложении. В следующем разделе мы представим аргументы, основанные на методе перенормировки фоновым полем, в пользу того, что наборы $\{\mu_{k_1,\dots,k_q}\}$, определяющие операторы чистого скейлинга в не взаимодействующей задаче, также определяют операторы чистого скейлинга во взаимодействующей задаче.

При условии, что Ур. (3.30) выполнено, аномальная размерность соответствующего оператора чистого скейлинга в двухпетлевом приближении дается

Table 3.1: Коэффициенты μ_{k_1, \dots, k_q} и c_3 для операторов чистого скейлинга с $q = 2, 3$ и 4 из ссылок [42, 96, 97] (см. текст).

$q = 2$					
$\mu_{1,1}$	1	1			
μ_2	-2	1			
c_3	3/2	-3/2			
$q = 3$					
$\mu_{1,1,1}$	1	1	1		
$\mu_{2,1}$	-6	-1	3		
μ_3	-8	-2	2		
c_3	21/2	3	-12		
$q = 4$					
$\mu_{1,1,1,1}$	1	1	1	1	1
$\mu_{2,1,1}$	-12	-5	-2	1	6
$\mu_{2,2}$	12	-2	7	-2	3
$\mu_{3,1}$	32	4	-8	-2	8
μ_4	-48	8	2	-4	6
c_3	39	18	3/2	-3/2	-93/2

$$-\frac{d \ln m'_q}{dy} = \zeta_q^{(\mu)} = \mu_{2,1,1, \dots, 1} \left[t + \frac{t^2}{2} \sum_{j=0}^3 c(\gamma_j) \right] + O(t^3). \quad (3.31)$$

Здесь $y = \ln 1/h'$. Подчеркнем, что в двухпетлевом приближении аномальная размерность оператора чистого скейлинга $\zeta_q^{(\mu)}$ полностью определяется одним коэффициентом $\mu_{2,1,1, \dots, 1}$. Критический индекс $\Delta_q^{(\mu)}$ для оператора чистого скейлинга $\mathcal{K}_q^{(\mu)}$ равен соответствующей аномальной размерности $\zeta_q^{(\mu)}$ в фиксированной точке.

Напомним, что аналогичная ситуация известна для не взаимодействующей задачи, где аномальная размерность операторов чистого скейлинга известна вплоть до четвертой петли [42, 96, 97]:

$$\zeta_{q,n}^{(\mu)} = \mu_{2,1,1, \dots, 1} t + c_3 \zeta(3) t^4 + O(t^5). \quad (3.32)$$

Здесь $\zeta(z)$ обозначает дзета-функцию Римана и коэффициенты c_3 , вычисленные в статье [42, 96, 97] приведены в таблице 3.1 для $q = 2, 3$ и 4 . Так как $c(0) = 0$ наш результат (3.31) находится в согласии с не взаимодействующим результатом (3.32).

3.4 Перенормировка методом фонового поля

Результаты предыдущего раздела показывают, что наборы коэффициентов $\{\mu_{k_1, \dots, k_q}\}$, которые определяют локальные операторы чистого скейлинга без производных для NLSM Финкельштейна, на самом деле совпадают с наборами, известными из невзаимодействующей теории. Ниже в этом разделе приведены дополнительные аргументы, основанные на методе фонового поля, которые подтверждают это наблюдение.

Для использования метода перенормировки фонового поля мы разделяем матричное поле Q на быстрые компоненты \hat{Q} и медленные компоненты $Q_0 = \mathcal{T}_0^{-1} \Lambda \mathcal{T}_0$: $Q = \mathcal{T}_0^{-1} \hat{Q} \mathcal{T}_0$. Быстрые и медленные моды разделены в частотном пространстве Мацубары масштабом энергий \mathcal{E}_Λ таким образом, что $2\pi T \ll \mathcal{E}_\Lambda \ll 2\pi T N_m$. В частности, медленные моды тривиальны на больших частотах: $(\mathcal{T}_0)_{nm}^{\alpha\beta} = \delta_{nm} \delta^{\alpha\beta} t_{00}$ если $|\varepsilon_n| > \mathcal{E}_\Lambda$ или $|\varepsilon_m| > \mathcal{E}_\Lambda$.

Первый нетривиальный пример - перенормировка фонового поля операторов билинейных по Q . Для них есть два базисных оператора $\mathcal{A}_{1,1}$ и \mathcal{A}_2 . В методе фонового поля они преобразуются как

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{1,1} &\rightarrow \langle \text{sp} [(\mathcal{T}_0^{-1})_{nn'}^{\alpha_1 \alpha'_1} \hat{Q}_{n'n''}^{\alpha'_1 \alpha''_1} (\mathcal{T}_0)_{n''n}^{\alpha''_1 \alpha_1}] \\
&\quad \times \text{sp} [(\mathcal{T}_0^{-1})_{mm'}^{\alpha_2 \alpha'_2} \hat{Q}_{m'm''}^{\alpha'_2 \alpha''_2} (\mathcal{T}_0)_{m''m}^{\alpha''_2 \alpha_2}] \rangle_f, \\
\mathcal{A}_2 &\rightarrow \langle \text{sp} [(\mathcal{T}_0^{-1})_{nn'}^{\alpha_1 \alpha'_1} \hat{Q}_{n'n''}^{\alpha'_1 \alpha''_1} (\mathcal{T}_0)_{n''m}^{\alpha''_1 \alpha_2} \\
&\quad \times (\mathcal{T}_0^{-1})_{mm'}^{\alpha_2 \alpha'_2} \hat{Q}_{m'm''}^{\alpha'_2 \alpha''_2} (\mathcal{T}_0)_{m''n}^{\alpha''_2 \alpha_1}] \rangle_f.
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Здесь $\langle \dots \rangle_f$ обозначает усреднение по быстрым модам \hat{Q} . Подчеркнем, что чтобы в правых сторонах Ур. (3.33) получались билинейные по Q_0 вклады, мацубаровские индексы матриц \mathcal{T}_0 и \mathcal{T}_0^{-1} должны быть ‘маленькими’, $\max\{|\varepsilon_{n'}|, |\varepsilon_{n''}|, |\varepsilon_{m'}|, |\varepsilon_{m''}|\} < \mathcal{E}_\Lambda$. Отметим, что разделения на медленные и быстрые моды достаточно сделать только в операторах. Перенормировка действия NLSM и перенормировка этих билинейных операторов Q с малыми частотами Мацубары не зависят друг от друга. Поэтому для того, чтобы вычислить средние в правой части Ур. (3.33) нужно знать двухточечную корреляционную функцию быстрых полей, $\langle \hat{Q}_{n'n''}^{\alpha'_1 \alpha''_1} \cdot \hat{Q}_{m'm''}^{\alpha'_2 \alpha''_2} \rangle_f$, только с ‘маленькими’ частотами Мацубары.

Начнем с рассмотрения двухточечной корреляционной функции быстрых мод в однопетлевом приближении. Разлагая матричное поле

\hat{Q} до второго порядка по W (см. Ур. (2.20)) и используя Ур. (3.18) и (3.21), находим

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}_2[Q] \\ \mathcal{A}_{1,1}[Q] \end{pmatrix} \rightarrow [1 + 2(Z^{1/2} - 1)] \begin{pmatrix} \mathcal{A}_2[Q_0] \\ \mathcal{A}_{1,1}[Q_0] \end{pmatrix} - \frac{th^\epsilon}{\epsilon} \mathcal{M}_2 \begin{pmatrix} \mathcal{A}_2[Q_0] \\ \mathcal{A}_{1,1}[Q_0] \end{pmatrix}, \quad (3.34)$$

где матрица смешивания

$$\mathcal{M}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.35)$$

Собственные значения (со знаком минус) матрицы \mathcal{M}_2 равны $\lambda_2^{(1)} = -2$ и $\lambda_2^{(2)} = 1$. Соответствующие собственные операторы

$$\mathcal{P}_2^{(-2)} = \mathcal{A}_{1,1} - 2\mathcal{A}_2, \quad \mathcal{P}_2^{(1)} = \mathcal{A}_{1,1} + \mathcal{A}_2. \quad (3.36)$$

Это означает, что значения μ_2 равны -2 и 1 в соответствии с таблицей 3.1. Подчеркнем, что в однопетлевом приближении матрица смешивания \mathcal{M}_2 не зависит от параметров взаимодействия γ_s и γ_t . Они появляются только в общем коэффициенте $[1 + 2(Z^{1/2} - 1)]$.

Далее мы показываем, почему матрица смешивания \mathcal{M}_2 остается одинаковой для всех порядков по t . Начнем с корреляционной функции $\langle \hat{Q}_{n'n''}^{\alpha'_1 \alpha''_1} \hat{Q}_{m'm''}^{\alpha'_2 \alpha''_2} \rangle_f$ с $n'n'' < 0$ и $m'm'' < 0$. Поскольку в случае $nm < 0$ разложение Q_{nm} в терминах W в квадратичной параметризации состоит из одного члена $-W$, корреляционная функция имеет ту же структуру, что и пропагатор $\langle W_{n'n''}^{\alpha'_1 \alpha''_1} W_{m'm''}^{\alpha'_2 \alpha''_2} \rangle$, но с перенормированными параметрами. В рамках однопетлевого приближения этот факт был явно проверен для $\alpha'_1 \neq \alpha''_1$ в статье [23]. В общем, мы можем писать для $n'n'' < 0$, $m'm'' < 0$ и $n'm'' > 0$ (ср. с Ур. (3.18)).

$$\begin{aligned} \left\langle [\hat{Q}_{rj}]_{n'n''}^{\alpha'_1 \alpha''_1} [\hat{Q}_{rj}]_{m'm''}^{\alpha'_2 \alpha''_2} \right\rangle &= Z \delta^{\alpha'_1 \alpha''_1} \delta^{\alpha'_2 \alpha''_2} \delta_{n'-n'', m''-m'} \\ &\times B_1 \left[\delta_{n'm''} + TC_1 \delta^{\alpha'_1 \alpha''_1} \right], \end{aligned} \quad (3.37)$$

в случае $r = 0, 3$ и $j = 0, 1, 2, 3$, и

$$\left\langle [\hat{Q}_{rj}]_{n'n''}^{\alpha'_1 \alpha''_1} [\hat{Q}_{rj}]_{m'm''}^{\alpha'_2 \alpha''_2} \right\rangle = Z \tilde{B}_1 \delta^{\alpha'_1 \alpha''_1} \delta^{\alpha'_2 \alpha''_2} \delta_{n'm''} \delta_{n''m'} \quad (3.38)$$

в случае $r = 1, 2$ и $j = 0, 1, 2, 3$. Здесь функции B_1 и C_1 являются диффузонами с перенормированными параметрами g , Γ_j и Z_ω . Куперон \tilde{B}_1 , а также мезоскопические диффузоны B_1 и C_1 содержат в своих знаменателях соответствующие времена дефазировки, вызванные взаимодействием и беспорядком. Мы рассматриваем масштабы длин короче, чем длина дефазировки, так что перенормированный куперон \tilde{B}_1 становится таким же, как и перенормированный диффузон B_1 . Подчеркнем, что второй член в правой части Ур. (3.37) пропорционален температуре и поэтому может быть опущен при $T \rightarrow 0$. Корреляционную функцию $\langle \hat{Q}_{n'n''}^{\alpha_1' \alpha_1''} \hat{Q}_{m'm''}^{\alpha_2' \alpha_2''} \rangle_f$ для $n'n'' < 0$, $m'm'' < 0$ и $n'm'' < 0$ можно получить из Ур. (3.37) и (3.38) с помощью Ур. (3.6).

Далее рассмотрим корреляционную функцию $\langle \hat{Q}_{n'n''}^{\alpha_1' \alpha_1''} \hat{Q}_{m'm''}^{\alpha_2' \alpha_2''} \rangle_f$ с $n'n'' < 0$ и $m'm'' > 0$. Для того чтобы эта корреляционная функция была ненулевой, необходимо учитывать негауссову часть действия S_h , которая является нечетной по W . Самый простой вклад связан со взаимодействующей частью действия S_h , которая по W имеет третий порядок. Оценивая средние с помощью теоремы Вика, видим, что индекс суммирования n в Ур. (3.1) ограничен областью малых энергий, $|\omega_n| < \mathcal{E}_\Lambda$. Таким образом, благодаря наличию T во взаимодействующей части действия (3.1) этот простейший вклад в двухточечную корреляционную функцию с $n'n'' < 0$ и $m'm'' > 0$ становится пропорциональным температуре. Этот аргумент может быть расширен до вкладов более высокого порядка по W . В целом, для $n'n'' < 0$ и $m'm'' > 0$ мы находим, что

$$\langle \hat{Q}_{n'n''}^{\alpha_1' \alpha_1''} \hat{Q}_{m'm''}^{\alpha_2' \alpha_2''} \rangle_f \propto T. \quad (3.39)$$

Таким образом, двухточечная корреляционная функция с $n'n'' < 0$ и $m'm'' > 0$ не вносит вклад при $T = 0$.

Далее рассмотрим $\langle \hat{Q}_{n'n''}^{\alpha_1' \alpha_1''} \hat{Q}_{m'm''}^{\alpha_2' \alpha_2''} \rangle_f$ с $n'n'' > 0$, $m'm'' > 0$, и $n'm'' > 0$. В этом случае вклад наименьшего порядка происходит от разложения каждого быстрого поля \hat{Q} до второго порядка по W . Оценка средних с помощью теоремы Вика и Ур. (3.18) и (3.21) предполагает следующий общий результат при $T = 0$:

$$\begin{aligned} \langle [\hat{Q}_{rj}]_{n'n''}^{\alpha_1' \alpha_1''} [\hat{Q}_{rj}]_{m'm''}^{\alpha_2' \alpha_2''} \rangle_f &= Z \delta_{r0} \delta_{j0} \delta_{n'n''} \delta_{m'm''} \delta^{\alpha_1' \alpha_1''} \delta^{\alpha_2' \alpha_2''} \\ &+ B_2 \delta_{n'm''} \delta_{m'n''} \delta^{\alpha_1' \alpha_2''} \delta^{\alpha_2' \alpha_1''} - \frac{\tilde{B}_2}{4} \text{sp}[t_{rj} C t_{rj}^T C] \\ &\times \delta_{n'm'} \delta_{n''m''} \delta^{\alpha_1' \alpha_2'} \delta^{\alpha_1'' \alpha_2''}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Обращаем внимание, что следующее соотношение, $\tilde{B}_2 \equiv B_2$, справедливо в связи с условием зарядового сопряжения(3.6).

Наконец, обсудим $\langle \hat{Q}_{n'n''}^{\alpha_1\alpha_1'} \hat{Q}_{m'm''}^{\alpha_2\alpha_2'} \rangle_f$ с $n'n'' > 0$, $m'm'' > 0$, и $n'm' < 0$. Как и в предыдущем случае, вклад наименьшего порядка дается разложением \hat{Q} до второго порядка по W . Оценка средних с помощью Ур. (3.18) – (3.21) и теорема Вика предполагают следующий результат для $T = 0$:

$$\langle \hat{Q}_{n'n''}^{\alpha_1\alpha_1'} \hat{Q}_{m'm''}^{\alpha_2\alpha_2'} \rangle_f = Z B_3 \Lambda_{n'n''}^{\alpha_1\alpha_1'} \Lambda_{m'm''}^{\alpha_2\alpha_2'}. \quad (3.41)$$

Подчеркнем, что такая простая форма двухточечной корреляционной функции быстрых полей, Ур. (3.38) – (3.41), обусловлена (i) пределом нулевой температуры и (ii) малым значением частотных индексов, $\max\{|\varepsilon_{n'}|, |\varepsilon_{n''}|, |\varepsilon_{m'}|, |\varepsilon_{m''}|, |\varepsilon_{m''}|\} < \mathcal{E}_\Lambda$.

Используя Ур. (3.38) – (3.41), мы выполняем усреднение по быстрым полям в Ур. (3.33) и находим

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathcal{A}_2[Q] \\ \mathcal{A}_{1,1}[Q] \end{pmatrix} &\rightarrow Z(1 + B_3)/2 \begin{pmatrix} \mathcal{A}_2[Q_0] \\ \mathcal{A}_{1,1}[Q_0] \end{pmatrix} \\ &+ 2Z(B_1 - B_2)\mathcal{M}_2 \begin{pmatrix} \mathcal{A}_2[Q_0] \\ \mathcal{A}_{1,1}[Q_0] \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Сравнивая Ур. (3.42) с Ур. (3.34), можно увидеть, что Ур. (3.36) выполняется за рамками однопетлевого приближения и, в общем случае, билинейные по Q операторы чистого скейлинга соответствуют $\mu_2 = -2$ и $\mu_2 = 1$.

Метод перенормировки фоновым полем для локальных операторов более высокого порядка по Q (для $q = 3$ и 4) в рамках однопетлевого приближения для быстрых полей представлен в приложении 4.8. Используя аргументы, аналогичные приведенным выше, можно распространить результаты однопетлевого приближения из приложения 4.8 на все порядки по t .

3.5 Выводы и заключение

Результаты предыдущих разделов прямо указывают на то, что NLSM Финкельштейна содержит большой класс операторов чистого скейлинга, которые могут быть построены как простое обобщение операторов чистого скейлинга, известных для невзаимодействующих

NLSM. Мы подчеркиваем, что эти операторы, Eq. (3.14), не являются инвариантными при вращениях в пространствах Мацубары и реплик. В отличие от невзаимодействующего случая, набор локальных операторов чистого скейлинга без производных в NLSM Финкельштейна не исчерпан этими калибровочно неинвариантными операторами. Например, известно [15], что оператор во второй строке действия NLSM (3.1) может быть использован для построения калибровочно-инвариантного оператора. В NLSM Финкельштейна существуют локальные калибровочно-инвариантные операторы, которые включают в себя три и четыре матрицы Q [72]. Отметим, что в случае таких операторов перенормировка фонового поля действия NLSM влияет на перенормировку операторов [16].

Как уже упоминалось, оператор $\mathcal{K}_2^{(-2)}$ может быть выражен в виде второго момента LDOS, см. (3.12). В качестве альтернативы этот же оператор можно записать в терминах следующей двухточечной корреляционной функции одночастичной функции Грина:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_2^{(-2)} \propto & \langle \text{Im } G_E^+(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \text{Im } G_E^+(\mathbf{r}', \mathbf{r}') \\ & + 2 \text{Im } G_E^+(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \text{Im } G_E^+(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rangle_{\text{dis}}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Здесь предполагаем, что расстояние между двумя точками \mathbf{r} и \mathbf{r}' удовлетворяет следующему условию:

$$\lambda_F \ll |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \ll l, \quad (3.44)$$

где λ_F и l означают длину Ферми и среднюю длину свободного пробега соответственно. Другой оператор чистого скейлинга билинейный по Q может быть аналогичным образом выражен через одночастичную функцию Грина:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_2^{(1)} \propto & \langle \text{Im } G_E^+(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \text{Im } G_E^+(\mathbf{r}', \mathbf{r}') \\ & - \text{Im } G_E^+(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \text{Im } G_E^+(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rangle_{\text{dis}}, \end{aligned} \quad (3.45)$$

где точки \mathbf{r} и \mathbf{r}' удовлетворяют условию (3.44). В качестве альтернативы можно записать оператор чистого скейлинга $\mathcal{K}_2^{(1)}$ в терминах пространственной корреляционной функции LDOS:

$$\mathcal{K}_2^{(1)} \propto \langle 3\rho(E, \mathbf{r})\rho(E, \mathbf{r}') - \rho(E, \mathbf{r})\rho(E, \mathbf{r}) \rangle_{\text{dis}}, \quad (3.46)$$

где опять же расстояние $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ ограничено неравенством (3.44). В общем случае все операторы чистого скейлинга $\mathcal{K}_q^{(\mu)}$ могут быть

выражены в терминах усредненных по беспорядку пространственных корреляционных функций одночастичной функции Грина или, как альтернатива, LDOS. Это означает, что скейлинговое поведение операторов чистого скейлинга можно извлечь из аккуратного анализа данных, полученных с помощью сканирующей туннельной микроскопии.

В данной главе мы рассматривали систему с симметрией вращения спина и обращения времени. Аналогичные результаты и выводы можно получить и для других случаев, в которых нарушены симметрия обращения времени и/или вращения спина. В случае нарушения симметрии по вращению спина, но сохраненной симметрии по обращению времени наши результаты позволяют предсказать поведение LDOS при сканировании карт туннельной спектроскопии на поверхности трехмерного топологического изолятора.

Глава 4

Приложение

4.1 Вычисление функции Грина для электронов в квантовой точке во втором порядке по туннелированию

В этом приложении мы представляем некоторые детали вывода результатов (1.15). Прежде всего, удобно переписать определение функции Грина в мнимом времени $\tau > 0$ (см. Ур. (1.9)) в представлении взаимодействия как

$$\mathcal{G}_{\alpha\sigma;\beta\sigma'}(\tau) = -\frac{1}{\mathcal{Z}} \text{Tr} \left[e^{-\tau H_0} U(\tau) d_{\beta\sigma'}^\dagger e^{-(\beta-\tau)H_0} \times U(\beta-\tau) d_{\alpha\sigma} \right], \quad (4.1)$$

где $H_0 = H_{QD} + H_R$ и

$$U(\tau) = \mathcal{T}_\tau \exp \left(- \int_0^\tau d\tau' e^{\tau' H_0} H_T e^{-\tau' H_0} \right). \quad (4.2)$$

Далее мы разлагаем $U(\tau)$ до второго порядка по туннельному гамильтониану,

$$U(\tau) \simeq 1 - \int_0^\tau d\tau' e^{\tau' H_0} H_T e^{-\tau' H_0} + \int_0^\tau d\tau' e^{\tau' H_0} H_T \times e^{-\tau' H_0} \int_0^{\tau'} d\tau'' e^{\tau'' H_0} H_T e^{-\tau'' H_0}, \quad (4.3)$$

подставляем этот результат в выражение (4.1) для функции Грина и берем след по степеням свободы резервуара с помощью соотношения

$$\frac{\text{Tr} \left[\mathcal{T}_\tau a_{k\sigma}(\tau) a_{k'\sigma'}^\dagger(0) e^{-\beta H_R} \right]}{\text{Tr} e^{-\beta H_R}} = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \delta_{\sigma, \sigma'} e^{-\tau \varepsilon_{k\sigma}} \times \left[\theta(\tau) - n_F(\varepsilon_{k\sigma}) \right], \quad (4.4)$$

где $\theta(\tau)$ означает ступенчатую функцию Хевисайда. Тогда мы находим,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\alpha\sigma; \beta\sigma}(\tau) = & \frac{1}{Z} \sum_{\gamma, \eta; \sigma'} \int_{-\infty}^{\infty} dE Q_{\gamma\eta}^{\sigma'}(E) \left\{ \int_0^{\beta-\tau} d\tau_1 \int_0^{\tau} d\tau_2 \right. \\ & \left[n_F(E) e^{(\tau+\tau_2-\tau_1)E} \text{Tr} \left(d_{\gamma\sigma'}^\dagger e^{-\tau_1 H_{QD}} d_{\beta\sigma}^\dagger e^{-(\beta-\tau-\tau_2)H_{QD}} d_{\eta\sigma'} e^{-\tau_2 H_{QD}} d_{\alpha\sigma} e^{-(\tau-\tau_1)H_{QD}} \right) \right. \\ & \left. + [1 - n_F(E)] e^{-(\tau+\tau_2-\tau_1)E} \text{Tr} \left(d_{\eta\sigma'} e^{-\tau_1 H_{QD}} d_{\beta\sigma}^\dagger e^{-(\beta-\tau-\tau_2)H_{QD}} d_{\gamma\sigma'}^\dagger e^{-\tau_2 H_{QD}} d_{\alpha\sigma} e^{-(\tau-\tau_1)H_{QD}} \right) \right] \\ & - \int_0^{\tau} d\tau_1 \int_0^{\tau} d\tau_2 \left[n_F(E) e^{(\tau_1-\tau_2)E} \text{Tr} \left(d_{\gamma\sigma'}^\dagger e^{-\tau_2 H_{QD}} d_{\beta\sigma}^\dagger e^{-(\beta-\tau)H_{QD}} d_{\alpha\sigma} e^{-(\tau-\tau_1)H_{QD}} d_{\eta\sigma'} e^{-(\tau_1-\tau_2)H_{QD}} \right) \right. \\ & \left. + [1 - n_F(E)] e^{-(\tau_1-\tau_2)E} \text{Tr} \left(d_{\eta\sigma'} e^{-\tau_2 H_{QD}} d_{\beta\sigma}^\dagger e^{-(\beta-\tau)H_{QD}} d_{\alpha\sigma} e^{-(\tau-\tau_1)H_{QD}} d_{\gamma\sigma'}^\dagger e^{-(\tau_1-\tau_2)H_{QD}} \right) \right] \\ & - \int_0^{\beta-\tau} d\tau_1 \int_0^{\tau} d\tau_2 \left[n_F(E) e^{(\tau_1-\tau_2)E} \text{Tr} \left(d_{\gamma\sigma'}^\dagger e^{-\tau_2 H_{QD}} d_{\alpha\sigma} e^{-\tau H_{QD}} d_{\beta\sigma}^\dagger e^{-(\beta-\tau-\tau_1)H_{QD}} d_{\eta\sigma'} e^{-(\tau_1-\tau_2)H_{QD}} \right) \right. \\ & \left. + [1 - n_F(E)] e^{-(\tau_1-\tau_2)E} \text{Tr} \left(d_{\eta\sigma'} e^{-\tau_2 H_{QD}} d_{\alpha\sigma} e^{-\tau H_{QD}} d_{\beta\sigma}^\dagger e^{-(\beta-\tau-\tau_1)H_{QD}} d_{\gamma\sigma'}^\dagger e^{-(\tau_1-\tau_2)H_{QD}} \right) \right] \left. \right\}. \quad (4.5) \end{aligned}$$

Теперь мы выполняем интегрирование по мнимым временам τ_1 и τ_2 , пренебрегаем всеми членами, которые экспоненциально малы по βE_c , и делаем аналитическое продолжение на реальные частоты. Тогда мы

находим

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{\text{tot}}^\sigma(\varepsilon) = & \pi \sum_{\alpha\beta\gamma\eta} \sum_{i,f,\sigma'} \int d\varepsilon' Q_{\beta\alpha}^\sigma(\varepsilon) Q_{\gamma\eta}^{\sigma'}(\varepsilon') p_i \frac{1+e^{-\beta\varepsilon}}{1+e^{-\beta\varepsilon'}} \left[\langle i | d_{\gamma\sigma'}^\dagger \frac{1}{\varepsilon - E_f + H_{QD}} d_{\alpha\sigma} \right. \\
& + d_{\alpha\sigma} \frac{1}{\varepsilon + E_i - H_{QD}} d_{\gamma\sigma'}^\dagger | f \rangle \langle f | d_{\beta\sigma}^\dagger \frac{1}{\varepsilon - E_f + H_{QD}} d_{\eta\sigma'} + d_{\eta\sigma'} \frac{1}{\varepsilon + E_i - H_{QD}} d_{\beta\sigma}^\dagger | i \rangle \\
& \times \delta(\varepsilon' + E_f - \varepsilon - E_i) + e^{\beta\varepsilon} \delta(\varepsilon' + E_f - \varepsilon - E_i) \langle i | d_{\beta\sigma}^\dagger \frac{1}{\varepsilon - E_i + H_{QD}} d_{\gamma\sigma'}^\dagger + \\
& \left. + d_{\gamma\sigma'}^\dagger \frac{1}{\varepsilon + E_f - H_{QD}} d_{\beta\sigma}^\dagger | f \rangle \langle f | d_{\eta\sigma'} \frac{1}{\varepsilon - E_i + H_{QD}} d_{\alpha\sigma} + d_{\alpha\sigma} \frac{1}{\varepsilon + E_f - H_{QD}} d_{\eta\sigma'} | i \rangle \right].
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Отметим, что это выражение может быть получено в другом подходе (см. приложение 4.2). Это дает прозрачную интерпретацию состояний i и f как начального и конечного состояния квантовой точки. Неупругое рассеяние будет соответствовать разным начальному и конечному состояниям. Имея это в виду, отметим, что второй вклад в уравнении (4.6) содержит начальные и конечные состояния, которые отличаются числом электронов. Такой вклад не соответствует процессу рассеяния, и мы его опускаем. Наконец, мы получаем выражение (1.15).

4.2 Соотношение $\mathcal{A}_{\text{inel}}^\sigma(\varepsilon)$ и неупругого времени котуннелирования

В данном приложении мы демонстрируем связь между величиной $\mathcal{A}_{\text{inel}}^\sigma(\varepsilon)$ и частотой неупругого котуннелирования, рассчитанной с помощью обобщенного подхода Т-матрицы. Квантово-механическая частота переходов из собственного состояния $|I\rangle$ в собственное состояние $|F\rangle$ гамильтониана $H_{QD} + H_R$ из-за наличия H_T дается

$$\Gamma_{I \rightarrow F} = 2\pi |\langle I | \mathbf{T} | F \rangle|^2 \delta(E_I - E_F), \tag{4.7}$$

где

$$\mathbf{T} = H_T + H_T \frac{1}{E_I - H_{QD} - H_R} H_T + \dots \tag{4.8}$$

Это выражение является так называемым обобщенным золотым правилом Ферми в Т-матричном подходе (см. ссылку [88]). Вклад 4-го порядка, который мы называем скоростью котуннелирования,

$$\Gamma_{I \rightarrow F}^{IC} = 2\pi |\langle I | H_T \frac{1}{E_I - H_{QD} - H_R} H_T | F \rangle|^2 \delta(E_I - E_F) \tag{4.9}$$

Мы выбираем следующее начальное состояние $|I\rangle = |i\rangle|FS\rangle$, где $|FS\rangle$ обозначает море Ферми в резервуаре. Есть два возможных конечных состояния $|F_+\rangle = |f\rangle a_{k_2\sigma_2}^\dagger a_{k_1\sigma_1}|FS\rangle$ и $|F_-\rangle = |f\rangle a_{k_1\sigma_1} a_{k_2\sigma_2}^\dagger|FS\rangle$ с дополнительной парой электрон-дырка. Соответствующими промежуточными состояниями являются $|V_+\rangle = |v_+\rangle a_{k_1\sigma_1}|FS\rangle$ (с дополнительным электроном в квантовой точке) и $|V_-\rangle = |v_-\rangle a_{k_2\sigma_2}^\dagger|FS\rangle$ (с дополнительной дыркой в квантовой точке). Тогда мы находим

$$\begin{aligned}
& \langle F|H_T \frac{1}{E_I - H_{QD} - H_R} H_T|I\rangle = \\
& \sum_{\bar{t}_{p\alpha} t_{\beta p'}} \left\{ \frac{\langle f|\langle FS|a_{k_1\sigma_1}^\dagger a_{k_2\sigma_2} a_{p\sigma}^\dagger d_{\alpha\sigma} a_{k_1\sigma_1}|FS\rangle|v_+\rangle \langle v_+|\langle FS|a_{k_1\sigma_1}^\dagger d_{\beta\sigma'}^\dagger a_{p'\sigma'}|FS\rangle|i\rangle}{E_i - E_{v_+} + \varepsilon_{k_1\sigma_1}} \right. \\
& \left. + \frac{\langle f|\langle FS|a_{k_2\sigma_2} a_{k_1\sigma_1}^\dagger d_{\beta\sigma'}^\dagger a_{p'\sigma'} a_{k_2\sigma_2}^\dagger|FS\rangle|v_-\rangle \langle v_-|\langle FS|a_{k_2\sigma_2} a_{p\sigma}^\dagger d_{\alpha\sigma}|FS\rangle|i\rangle}{E_i - E_{v_-} - \varepsilon_{k_2\sigma_2}} \right\} \\
& = \sum_{\alpha\beta} \bar{t}_{k_2\alpha} t_{\beta k_1} n_{k_1\sigma_1} (1 - n_{k_2\sigma_2}) \left\{ n_{k_1\sigma_1} \left\langle f \left| d_{\alpha\sigma_2} \frac{1}{E_i - H_{QD} + \varepsilon_{k_1\sigma_1}} d_{\beta\sigma_1}^\dagger \right| i \right\rangle \right. \\
& \left. - (1 - n_{k_2\sigma_2}) \left\langle f \left| d_{\beta\sigma_1}^\dagger \frac{1}{E_i - H_{QD} - \varepsilon_{k_2\sigma_2}} d_{\alpha\sigma_2} \right| i \right\rangle \right\}. \tag{4.10}
\end{aligned}$$

Здесь $n_{k\sigma}$ - это оператор количества частиц для состояний в резервуаре. Следовательно, выполняя температурное усреднение по состояниям резервуара, мы получаем частоту переходов из состояния $|i\rangle$ в состояние $|f\rangle$ гамильтониана квантовой точки H_{QD}

$$\begin{aligned}
\Gamma_{i \rightarrow f}^{IC} &= 2\pi \int d\varepsilon d\varepsilon' n_F(\varepsilon) (1 - n_F(\varepsilon')) \sum_{\alpha\beta\gamma\eta\sigma_1\sigma_2} Q_{\beta\eta}^{\sigma_2}(\varepsilon) Q_{\gamma\alpha}^{\sigma_1}(\varepsilon') \\
& \times \left\langle i \left| d_{\gamma\sigma_2}^\dagger \frac{1}{\varepsilon' - E_i + H_{QD}} d_{\eta\sigma_1} + d_{\eta\sigma_1} \frac{1}{E_i + \varepsilon - H_{QD}} d_{\gamma\sigma_2}^\dagger \right| f \right\rangle \\
& \times \left\langle f \left| d_{\beta\sigma_1}^\dagger \frac{1}{\varepsilon' - E_i + H_{QD}} d_{\alpha\sigma_2} + d_{\alpha\sigma_2} \frac{1}{E_i + \varepsilon - H_{QD}} d_{\beta\sigma_1}^\dagger \right| i \right\rangle \delta(\varepsilon + E_i - E_f - \varepsilon'). \tag{4.11}
\end{aligned}$$

Выполняя температурное усреднение по начальным состояниям квантовой точки, мы получаем

$$\Gamma^{IC} = \sum_{i \neq f} p_i \Gamma_{i \rightarrow f}^{IC} = \int d\varepsilon \frac{\sum_{\sigma} \mathcal{A}_{\text{inel}}^{\sigma}(\varepsilon)}{2 \cosh^2(\beta\varepsilon/2)} \tag{4.12}$$

4.3 Детали двухпетлевой перенормировки \mathcal{K}_q

В данном приложении мы представляем детали двухпетлевой перенормировки операторов \mathcal{K}_q . Как мы уже обсуждали в основном тексте, удобно работать с неприводимыми операторами $\tilde{\mathcal{K}}_q$. Неприводимые операторы, соответствующие \mathcal{P}_q , будут обозначаться как $\tilde{\mathcal{P}}_q$.

4.4 Билинейные по Q операторы

Мы начнем с операторов \mathcal{K}_2 , которые квадратичны по Q . В однопетлевом приближении, то есть в первом порядке по $1/g$, есть ненулевой вклад в $\tilde{\mathcal{P}}_2^{\alpha_1\alpha_2}(i\varepsilon_{n_1}, i\varepsilon_{n_2})$ только для $n_1 n_2 < 0$. Мы находим для $n > 0$ и $m < 0$

$$\tilde{\mathcal{P}}_2^{\alpha_1\alpha_2;(1)}(i\varepsilon_n, i\varepsilon_m) = \mu_2 \langle \text{sp}[w_{nm}^{\alpha_1\alpha_2} \bar{w}_{mn}^{\alpha_2\alpha_1}] \rangle = \frac{128\mu_2}{g} \int_q \mathcal{D}_q(i\Omega_{nm}^\varepsilon). \quad (4.13)$$

Здесь мы вводим $\int_q \equiv \int d^d \mathbf{q} / (2\pi)^d$. После аналитического продолжения на реальные частоты и принятия после этого $T = E_1 = E_2 = 0$ мы находим следующий однопетлевой результат

$$\tilde{\mathcal{K}}_2^{(1)} = \mu_2 \frac{h^{\epsilon t}}{\epsilon}. \quad (4.14)$$

Во втором порядке по $1/g$ ненулевые вклады в $\tilde{\mathcal{P}}_2^{\alpha_1\alpha_2}(i\varepsilon_{n_1}, i\varepsilon_{n_2})$ существуют как для $n_1 n_2 > 0$, так и для $n_1 n_2 < 0$. В случае, если $n_1 > 0$ и $n_2 > 0$, можно написать

$$\tilde{\mathcal{P}}_2^{\alpha_1\alpha_2;(2)}(i\varepsilon_{n_1}, i\varepsilon_{n_2}) = \frac{\mu_2}{4} \sum_{m_1 m_2} \sum_{\beta_1 \beta_2} \langle \text{sp}[w_{n_1 m_1}^{\alpha_1 \beta_1} \bar{w}_{m_1 n_2}^{\beta_1 \alpha_2} w_{n_2 m_2}^{\alpha_2 \beta_2} \bar{w}_{m_2 n_1}^{\beta_2 \alpha_1}] \rangle. \quad (4.15)$$

Используя теорему Вика, получаем

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{P}}_2^{\alpha_1\alpha_2;(2)}(i\varepsilon_{n_1}, i\varepsilon_{n_2}) &= -\mu_2 \left(\frac{64}{g} \right)^2 \sum_{j=0}^3 \frac{\pi T \Gamma_j}{g} \times \\ &\times \sum_{\omega_n > \varepsilon_{n_2} > 0} \int_{q,p} \mathcal{D}_q(i\omega_n + i\Omega_{12}) \mathcal{D}_p(i\omega_n) \mathcal{D}_p^{(j)}(i\omega_n) + (\varepsilon_1 \leftrightarrow \varepsilon_2). \end{aligned} \quad (4.16)$$

После аналитического продолжения на вещественные энергии $i\varepsilon_{n_{1,2}} \rightarrow E_{1,2} + i0^+$, получаем

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{P}}_2^{\alpha_1\alpha_2;++;(2)}(E_1, E_2) &= -\mu_2 \left(\frac{32}{g}\right)^2 \sum_{j=0}^3 \frac{\Gamma_j}{ig} \\ \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \mathcal{F}_{\omega-E_2} \int_{q,p} \mathcal{D}_q^R(\omega + E_1 - E_2) \mathcal{D}_p^R(\omega) \mathcal{D}_p^{R,(j)}(\omega) &+ (E_1 \leftrightarrow E_2), \end{aligned} \quad (4.17)$$

где $\mathcal{F}_\omega = \tanh[\omega/(2T)]$ обозначает равновесную функцию распределения фермионов, а $\mathcal{D}_p^R(\omega)$ - запаздывающий пропагатор, соответствующий $\mathcal{D}_p(i\omega)$. Снова положим $E_1 = E_2 = T = 0$ и используем трюк Фейнмана

$$\frac{1}{ABC} = \int_0^1 \prod_{i=1}^3 dx_i \delta\left(\sum_i x_i - 1\right) \frac{2}{(Ax_1 + Bx_2 + Cx_3)^3} \quad (4.18)$$

что позволяет проинтегрировать по импульсам \mathbf{q} и \mathbf{p} , тогда получаем

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{P}}_2^{\alpha_1\alpha_2;++;(2)} &= \left(\frac{16}{g}\right)^2 \sum_{j=0}^3 \frac{\gamma_j A_\epsilon \Gamma(1-\epsilon) h^{2\epsilon}}{\epsilon \Gamma^2(1-\epsilon/2)} \int_0^1 \prod_{i=1}^3 dx_i \delta\left(\sum_i x_i - 1\right) \times \\ &\times \frac{x_2^{-1-\epsilon/2} (1-x_2)^{-1-\epsilon/2}}{1 + \gamma_j x_3}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Где $A_\epsilon = \Omega_d^2 \Gamma^2(1-\epsilon/2) \Gamma^2(1+\epsilon/2)$. Опустив исчезающие в пределе $\epsilon \rightarrow 0$ члены, мы можем выполнить интегрирование по переменным Фейнмана x_i :

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx_2 \int_0^{1-x_2} dx_3 \frac{1}{(x_2(1-x_2))^{1+\epsilon/2} (1-x_3 + a_j x_3)} &= -\frac{2 \log(1 + \gamma_j)}{\epsilon(1 + \gamma_j)} \\ &- \frac{2\gamma_j}{1 + \gamma_j} \frac{\partial}{\partial x} {}_3F_2\left(1, 1, 1; 2, x; \frac{\gamma_j}{1 + \gamma_j}\right) \Big|_{x=1} \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} {}_3F_2\left(1, 1, x; 2, 1; \frac{\gamma_j}{1 + \gamma_j}\right) \Big|_{x=1} + O(\epsilon). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Далее, используя следующее свойство гипергеометрической функции ${}_3F_2$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} {}_3F_2\left(1, 1, 1; 2, x; \frac{\gamma}{1 + \gamma}\right) \Big|_{x=1} &= -\frac{\partial}{\partial x} {}_3F_2\left(1, 1, x; 2, 1; \frac{\gamma}{1 + \gamma}\right) \Big|_{x=1} \\ &= \frac{(1 + \gamma) \log^2(1 + \gamma)}{2\gamma}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

находим

$$\tilde{\mathcal{P}}_2^{\alpha_1\alpha_2;++;(2)} = -8\mu_2 \frac{t^2 h^{2\epsilon}}{\epsilon^2} \sum_{j=0}^3 \left[\ln(1 + \gamma_j) - \frac{\epsilon}{4} \ln^2(1 + \gamma_j) \right]. \quad (4.22)$$

Двупетлевой вклад в $\tilde{\mathcal{P}}_2^{\alpha_1\alpha_2}(i\varepsilon_{n_1}, i\varepsilon_{m_1})$ с $n_1 \geq 0$ и $m_1 < 0$ равен

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{P}}_2^{\alpha_1\alpha_2;(2)}(i\varepsilon_n, i\varepsilon_m) &= -\frac{1}{4} \sum_{n_1 m_1} \sum_{\beta_1 \beta_2} \langle \langle \text{sp}[w_{nm_1}^{\alpha_1 \beta_1} \bar{w}_{m_1 n}^{\beta_1 \alpha_1}] \cdot \text{sp}[\bar{w}_{mn_1}^{\alpha_2 \beta_2} w_{n_1 m}^{\beta_2 \alpha_2}] \rangle \rangle \\ &\quad + \mu_2 \langle \text{sp}[w_{nm}^{\alpha_1 \alpha_2} \bar{w}_{mn}^{\alpha_2 \alpha_1}] \left[S_{h,4} + \frac{1}{2} S_{h,3}^2 \right] \rangle. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Здесь, как обычно, определяется неприводимое среднее, $\langle \langle A \cdot B \rangle \rangle \equiv \langle AB \rangle - \langle \rangle \langle BA \rangle$. Разложение действия S_h до третьего и четвертого порядков по W приводит к появлению членов $S_{h,3}$ и $S_{h,4}$:

$$S_{h,3} = \sum_{j=0}^3 \sum_{r=0;3} \frac{\pi T \Gamma_j}{4} \sum_{\beta, n} \int d\mathbf{r} \text{Tr} I_n^\beta t_{rj} W \text{Tr} I_{-n}^\beta t_{rj} \Lambda W^2, \quad (4.24)$$

и

$$\begin{aligned} S_{h,4} &= \frac{g}{128} \int_{q_1, \dots, q_4} \delta \left(\sum_{k=1}^4 \mathbf{q}_k \right) \sum_{\beta_1, \dots, \beta_4} \sum_{n_3, 4, m_3, 4} \text{sp}[w_{n_3 m_3}^{\beta_1 \beta_2}(\mathbf{q}_1) \bar{w}_{m_3 n_4}^{\beta_2 \beta_3}(\mathbf{q}_2) w_{n_4 m_4}^{\beta_3 \beta_4}(\mathbf{q}_3) \bar{w}_{m_4 n_3}^{\beta_4 \beta_1}(\mathbf{q}_4)] \\ &\quad \times \left[(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2)(\mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_4) + (\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_4)(\mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3) - 2h^2 - \frac{16Z_\omega}{g} (\Omega_{n_3 m_3}^\epsilon + \Omega_{n_4 m_4}^\epsilon) \right] \\ &\quad - \sum_{j=0}^3 \sum_{r=0;3} \frac{\pi T \Gamma_j}{16} \sum_{\beta, n} \int d\mathbf{r} \text{Tr} I_n^\beta t_{rj} \Lambda W^2 \text{Tr} I_{-n}^\beta t_{rj} \Lambda W^2. \end{aligned} \quad (4.25)$$

После вычисления средних в Ур.(4.23) по теореме Вика, получим

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{P}}_2^{\alpha_1\alpha_2;(2)}(i\varepsilon_n, i\varepsilon_m) &= -2 \left[\frac{16}{g} \int_q \mathcal{D}_q(i\Omega_{nm}^\varepsilon) \right]^2 + 2\mu_2 \left(\frac{16}{g} \right)^2 \times \\
&\int_{pq} \left[p^2 + q^2 + h^2 + \frac{16Z_\omega}{g} \Omega_{nm}^\varepsilon \right] \mathcal{D}_p(i\Omega_{nm}^\varepsilon) \mathcal{D}_q^2(i\Omega_{nm}^\varepsilon) \\
+ \mu_2 \left(\frac{64}{g} \right)^2 \sum_{j=0}^3 \left(\sum_{\omega_n > \varepsilon_n} + \sum_{\omega_n > -\varepsilon_m} \right) &\frac{\pi T \Gamma_j}{g} \int_{pq} \mathcal{D}_p^2(i\Omega_{nm}^\varepsilon) [p^2 + h^2 + q^2 + \\
&+ \frac{16Z_\omega}{g} (\Omega_{nm}^\varepsilon + \omega_n)] \mathcal{D}_q(i\omega_n) \mathcal{D}_q^{(j)}(i\omega_n) \\
- \mu_2 \left(\frac{64}{g} \right)^2 \sum_{j=0}^3 \sum_{\omega_n > 0} \frac{2\pi T \Gamma_j}{g} &\left[1 - \frac{16\Gamma_j \omega_n}{g} \int_{pq} \mathcal{D}_{p+q}^{(j)}(i\omega_n) \right] \mathcal{D}_q^2(i\Omega_{nm}^\varepsilon) \mathcal{D}_p(i\Omega_{nm}^\varepsilon + i\omega_n) \\
- \mu_2 \left(\frac{64}{g} \right)^2 \sum_{j=0}^3 \left(\sum_{\varepsilon_{n_1} > \omega_n > 0} + \sum_{-\varepsilon_{n_4} > \omega_n > 0} \right) &\frac{\pi T \Gamma_j}{g} \left[1 - \frac{16\Gamma_j \omega_n}{g} \int_{pq} \mathcal{D}_{p+q}^{(j)}(i\omega_n) \right] \times \\
&\mathcal{D}_q^2(i\Omega_{nm}^\varepsilon) \mathcal{D}_p(i\Omega_{nm}^\varepsilon - i\omega_n) \tag{4.26}
\end{aligned}$$

После аналитического продолжения на вещественные частоты в Ур. (4.26), получим ($\Omega = E_1 - E_2$)

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{P}}_2^{\alpha_1\alpha_2;+-;(2)}(E_1, E_2) &= -2 \left[\frac{16}{g} \int_q \mathcal{D}_q^R(\Omega) \right]^2 + 2\mu_2 \left(\frac{16}{g} \right)^2 \times \\
&\int_{pq} \left[p^2 + q^2 + h^2 - \frac{16Z_\omega i \Omega}{g} \right] \mathcal{D}_p^R(\Omega) \mathcal{D}_q^{R2}(\Omega) \\
+ \mu_2 \left(\frac{64}{g} \right)^2 \sum_{j=0}^3 \frac{\Gamma_j}{4ig} \int_{pq} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \mathcal{D}_p^{R2}(\Omega) &\left[p^2 + h^2 + q^2 - \frac{16Z_\omega i}{g} (\Omega + \omega) \right] \\
&\times (\mathcal{F}_{\omega-E_1} + \mathcal{F}_{\omega-E_2}) \mathcal{D}_q^R(\omega) \mathcal{D}_q^{R(j)}(\omega) \\
- \mu_2 \left(\frac{64}{g} \right)^2 \sum_{j=0}^3 \frac{\Gamma_j}{2ig} \int_{pq} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \mathcal{B}_\omega &\left[1 + \frac{16\Gamma_j i \omega}{g} \mathcal{D}_{p+q}^{R(j)}(\omega) \right] \mathcal{D}_q^{R2}(\Omega) \mathcal{D}_p^R(\Omega + \omega) \\
- \mu_2 \left(\frac{64}{g} \right)^2 \sum_{j=0}^3 \frac{\Gamma_j}{4ig} \int_{pq} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega (2\mathcal{B}_\omega - \mathcal{F}_{\omega-E_1} - \mathcal{F}_{\omega-E_2}) &\left[1 + \frac{16\Gamma_j i \omega}{g} \mathcal{D}_{p+q}^{R(j)}(\omega) \right] \\
&\times \mathcal{D}_q^{R2}(\Omega) \mathcal{D}_p^R(\Omega - \omega). \tag{4.27}
\end{aligned}$$

Здесь мы вводим бозонную функцию распределения $\mathcal{B}_\omega = \coth[\omega/(2T)]$. Далее мы полагаем энергии и температуру нулем, $E_1 = E_2 = T =$

0. Интегралы могут быть вычислены стандартным способом. Мы иллюстрируем вычисление наиболее сложного интеграла:

$$I = \int_0^\infty d\omega \omega \int_{pq} \mathcal{D}_p^{R(j)}(\omega) \mathcal{D}_q^{R2}(0) \mathcal{D}_{p+q}^R(\omega) = -\frac{A_\epsilon \Gamma(1-\epsilon) h^{2\epsilon}}{\epsilon \Gamma^2(1-\epsilon/2)} \times \\ \times \int_0^1 \prod_{i=1}^3 dx_i \delta\left(\sum_i x_i - 1\right) \frac{x_2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)^{-1-\epsilon/2}}{((1+\gamma_j)x_1 + x_3)^2}. \quad (4.28)$$

Для интегрирования по переменной Фейнмана мы используем следующую параметризацию $x_3 = \frac{1-u}{s+1}$, $x_2 = \frac{s}{s+1}$, и $x_1 = \frac{u}{s+1}$, с $0 < u \leq 1$, и $0 < s \leq \infty$. Тогда получаем

$$I = \int_0^1 du \frac{[u(1-u)]^{1-\epsilon/2} B(2, -1-\epsilon/2)}{(1+\gamma_j u)^2} {}_2F_1(2, -\epsilon, 1-\epsilon/2; 1-u+u^2), \quad (4.29)$$

где $B(a, b)$ бета-функция Эйлера. Используя асимптотическое разложение гипергеометрической функции:

$${}_2F_1(2, -\epsilon, 1-\epsilon/2, 1-u+u^2) \simeq 1 - \epsilon \left(\frac{1-u+u^2}{u-u^2} - \ln(u-u^2) \right) + O(\epsilon^2), \quad (4.30)$$

находим

$$I \simeq -\frac{2}{\epsilon} \frac{2\gamma_j - (2+\gamma_j) \ln(1+\gamma_j)}{\gamma_j^3} - \frac{2}{1+\gamma_j} + \frac{2(2+\gamma_j)}{\gamma_j^3} \times \\ \times \left(\text{li}_2(-\gamma_j) + 2 \ln(1+\gamma_j) + \frac{\ln^2(1+\gamma_j)}{4} \right). \quad (4.31)$$

Полный ответ

$$\tilde{\mathcal{P}}_2^{\alpha_1 \alpha_2; + -; (2)} = 32 \frac{t^2 h^{2\epsilon}}{\epsilon^2} \left(-1 + \mu_2 + \frac{\mu_2}{2} \epsilon \right) + 8\mu_2 \frac{t^2 h^{2\epsilon}}{\epsilon^2} \sum_{j=0}^3 \left[2f(\gamma_j) + 3 \ln(1+\gamma_j) \right. \\ \left. - \epsilon \frac{2+\gamma_j}{\gamma_j} \left(\ln(1+\gamma_j) + \text{li}_2(-\gamma_j) + \frac{1}{4} \ln^2(1+\gamma_j) \right) \right]. \quad (4.32)$$

Комбинируя Ур.(4.22) и (4.32), получаем двухпетлевой вклад в

неприводимую корреляционную функцию

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{K}}_2^{(2)} = \frac{t^2 h^{2\epsilon}}{4\epsilon^2} \left\{ 4 - 2\mu_2(2 + \epsilon) - 2\mu_2 \sum_{j=0}^3 [f(\gamma_j) + 2\ln(1 + \gamma_j)] \right. \\ \left. - \mu_2\epsilon \sum_{j=0}^3 [\ln(1 + \gamma_j) + 2f(\gamma_j) - c(\gamma_j)] \right\}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Приводимую корреляционную функцию можно получить из неприводимой с помощью следующей связи: $\mathcal{K}_2^{(2)} = Z + \tilde{\mathcal{K}}_2^{(2)}$. Мы вводим величину m'_2 таким образом, что отношение $\mathcal{K}_2^{(2)} = Zm'_2$ сохраняется. Используя Ур. (4.14) и (4.33), мы получаем Ур. (3.27) для m'_2 с

$$\begin{aligned} b_1 = \mu_2, \quad b_2 = 1 - \mu_2 - \frac{\mu_2}{2} \sum_{j=0}^3 f(\gamma_j), \\ b_3 = \frac{\mu_2}{4} \sum_{j=0}^3 c(\gamma_j). \end{aligned} \quad (4.34)$$

Для нахождения аномальной размерности m'_2 воспользуемся схемой минимального вычитания (см., например, [12]). Введем безразмерную величину $\bar{t} = t'h^\epsilon$ и, используя Ур. (3.23) и (3.27), выражаем t и m_2 как

$$t = (h')^{-\epsilon} \bar{t} Z_t, \quad m_2 = m'_2 Z_{m_2}. \quad (4.35)$$

Несмотря на то, что параметры взаимодействия γ_j перенормируются на однопетлевом уровне (см. ссылки [34, 17]), нам не нужно это учитывать, так как b_1 не зависит от γ_j . В самом низком порядке по \bar{t} параметры перенормировки можно найти в виде

$$Z_t = 1 + \frac{a_1 \bar{t}}{\epsilon}, \quad (4.36)$$

и

$$Z_{m_2}^{-1} = 1 + \frac{b_1 \bar{t}}{\epsilon} + \frac{\bar{t}^2}{\epsilon^2} [b_2 + b_1 a_1 + \epsilon b_3]. \quad (4.37)$$

Теперь аномальную размерность m'_2 можно вывести стандартным образом из условия, что m_2 не зависит от масштаба импульса h' . Таким образом, можно найти в двухпетлевом приближении:

$$-\frac{d \ln m'_2}{dy} = \zeta_2 = b_1 t + 2t^2 \left[b_3 + \frac{1}{\epsilon} \left(b_2 - \frac{b_1(b_1 - a_1)}{2} \right) \right]. \quad (4.38)$$

Аномальная размерность (4.38) имеет конечный предел при $\epsilon \rightarrow 0$ при следующем условии

$$b_2 = b_1(b_1 - a_1)/2 \quad (4.39)$$

что эквивалентно алгебраическому уравнению на μ_2 (см Ур. (3.30)):

$$\mu_2^2 + \mu_2 - 2 = 0. \quad (4.40)$$

Яркой особенностью этого уравнения является его независимость от параметров взаимодействия γ_j . Существуют два решения $\mu_2 = -2$ и $\mu_2 = 1$, которые определяют два билинейных по Q оператора чистого скейлинга. С помощью Ур. (4.34), Ур. (4.38) сводится к Ур. (3.31).

4.5 Операторы с тремя Q .

Приводимый оператор \mathcal{K}_3 с тремя матрицами Q включает следующий локальный оператор

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_3^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}(i\varepsilon_n, i\varepsilon_m, i\varepsilon_k) = & \langle \text{sp } Q_{nn}^{\alpha_1 \alpha_1} \text{ sp } Q_{mm}^{\alpha_2 \alpha_2} \text{ sp } Q_{kk}^{\alpha_3 \alpha_3} \rangle \\ & + \mu_{2,1} \langle \text{sp } [Q_{nm}^{\alpha_1 \alpha_2} Q_{mn}^{\alpha_2 \alpha_1}] \text{ sp } Q_{kk}^{\alpha_3 \alpha_3} \rangle \\ & + \mu_3 \langle \text{sp } [Q_{nm}^{\alpha_1 \alpha_2} Q_{mk}^{\alpha_2 \alpha_3} Q_{kn}^{\alpha_3 \alpha_1}] \rangle. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Приводимый оператор \mathcal{K}_3 удобно представлять как сумму неприводимого, $\tilde{\mathcal{K}}_3$, и операторов чистого скейлинга с двумя матрицами Q (обозначаем их как $\mathcal{K}_2^{(-2)}$ и $\mathcal{K}_2^{(1)}$):

$$\mathcal{K}_3 = \tilde{\mathcal{K}}_3 + \sqrt{Z} \left(\mathcal{K}_2^{(-2)} + 2\mathcal{K}_2^{(1)} + \frac{\mu_2}{3} (\mathcal{K}_2^{(1)} - \mathcal{K}_2^{(-2)}) - 2Z \right). \quad (4.42)$$

Неприводимая корреляционная функция $\tilde{\mathcal{K}}_3$ не имеет однопетлевого вклада. Двухпетлевой вклад связан с оператором \mathcal{A}_3 . Мы находим

$$\tilde{\mathcal{K}}_3 = \frac{3\mu_3 t^2 h^{2\epsilon}}{2\epsilon^2} \quad (4.43)$$

Используя Ур. (4.43) и (4.34), из Ур. (4.42) получаем соотношение $\mathcal{K}_3 = Z^{3/2} m'_3$ где m'_3 дается Ур. (3.27) с

$$\begin{aligned} b_1 &= \mu_{2,1}, & b_2 &= 3 + \frac{3}{2}\mu_3 - \mu_{2,1} - \frac{\mu_{2,1}}{2} \sum_{j=0}^3 f(\gamma_j), \\ b_3 &= \frac{\mu_{2,1}}{4} \sum_{j=0}^3 c(\gamma_j). \end{aligned} \quad (4.44)$$

Тогда условие перенормируемости (4.39) дает следующее уравнение (см Ур. (3.30)):

$$\mu_{2,1}^2 + \mu_{2,1} = 3\mu_3 + 6. \quad (4.45)$$

Опять же, это уравнение не зависит от параметров взаимодействия γ_j и удовлетворяется коэффициентами $\mu_{2,1}$ и μ_3 из невзаимодействующего случая из таблицы 3.1.

4.6 Операторы с четырьмя Q .

Приводимый оператор \mathcal{K}_4 с четырьмя матрицами Q включает следующий локальный оператор

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_4^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}(i\varepsilon_n, i\varepsilon_m, i\varepsilon_k, i\varepsilon_l) &= \langle \text{sp } Q_{nn}^{\alpha_1\alpha_1} \text{ sp } Q_{mm}^{\alpha_2\alpha_2} \text{ sp } Q_{kk}^{\alpha_3\alpha_3} \text{ sp } Q_{ll}^{\alpha_4\alpha_4} \rangle \\ &\quad + \mu_{2,1,1} \langle \text{sp } [Q_{nm}^{\alpha_1\alpha_2} Q_{mn}^{\alpha_2\alpha_1}] \text{ sp } Q_{kk}^{\alpha_3\alpha_3} \text{ sp } Q_{ll}^{\alpha_4\alpha_4} \rangle \\ + \mu_{2,2} \langle \text{sp } [Q_{nm}^{\alpha_1\alpha_2} Q_{mn}^{\alpha_2\alpha_1}] \text{ sp } [Q_{kl}^{\alpha_3\alpha_4} Q_{lk}^{\alpha_4\alpha_3}] \rangle &+ \mu_{3,1} \langle \text{sp } [Q_{nm}^{\alpha_1\alpha_2} Q_{mk}^{\alpha_2\alpha_3} Q_{kn}^{\alpha_3\alpha_1}] \text{ sp } Q_{ll}^{\alpha_4\alpha_4} \rangle \\ + \mu_4 \langle \text{sp } [Q_{nm}^{\alpha_1\alpha_2} Q_{mk}^{\alpha_2\alpha_3} Q_{kl}^{\alpha_3\alpha_4} Q_{ln}^{\alpha_4\alpha_1}] \rangle. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Приводимый оператор \mathcal{K}_4 может быть записан как сумма неприводимого, $\tilde{\mathcal{K}}_4$, и операторов чистого скейлинга с двумя и тремя матрицами Q (мы обозначаем последние $\mathcal{K}_3^{(-6)}$, $\mathcal{K}_3^{(-1)}$, и $\mathcal{K}_3^{(3)}$):

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_4 &= \tilde{\mathcal{K}}_4 + 3Z^2 - 2Z \left(\mathcal{K}_2^{(-2)} + 2\mathcal{K}_2^{(1)} \right) - \frac{\mu_{2,1,1}}{3} Z \left(\mathcal{K}_2^{(1)} - \mathcal{K}_2^{(-2)} \right) \\ &\quad + \frac{4}{15} Z^{1/2} \left(\mathcal{K}_3^{(-6)} + 9\mathcal{K}_3^{(-1)} + 5\mathcal{K}_3^{(3)} \right) \\ + \frac{\mu_{3,1}}{60} Z^{1/2} \left(4\mathcal{K}_3^{(-6)} - 9\mathcal{K}_3^{(-1)} + 5\mathcal{K}_3^{(3)} \right) &+ \frac{\mu_{2,1,1}}{15} Z^{1/2} \left(-2\mathcal{K}_3^{(-6)} - 3\mathcal{K}_3^{(-1)} + 5\mathcal{K}_3^{(3)} \right). \end{aligned} \quad (4.47)$$

Неприводимая корреляционная функция $\tilde{\mathcal{K}}_4$ не имеет однопетлевого вклада. Двухпетлевой вклад связан с оператором $\mathcal{A}_{2,2}$. Находим

$$\tilde{\mathcal{K}}_4 = \frac{\mu_{2,2} t^2 h^{2\epsilon}}{\epsilon^2} \quad (4.48)$$

Используя Ур. (4.48) и (4.34), из Ур. (4.47) получаем соотношение $\mathcal{K}_4 = Z^2 m'_4$ где m'_4 дается Ур. (3.27) с

$$\begin{aligned} b_1 &= \mu_{2,1,1}, & b_3 &= \frac{\mu_{2,1,1}}{4} \sum_{j=0}^3 c(\gamma_j), \\ b_2 &= 6 + \mu_{2,2} + \frac{3}{2} \mu_{3,1} - \mu_{2,1,1} - \frac{\mu_{2,1,1}}{2} \sum_{j=0}^3 f(\gamma_j). \end{aligned} \quad (4.49)$$

Тогда условие перенормируемости (4.39) дает следующее уравнение (см Ур. (3.30)):

$$\mu_{2,1}^2 + \mu_{2,1} = 3\mu_{3,1} + 2\mu_{2,2} + 12. \quad (4.50)$$

Опять же это уравнение не зависит от параметров взаимодействия γ_j и удовлетворяется коэффициентами $\mu_{2,1,1}$, $\mu_{3,1}$ и $\mu_{2,2}$ из не взаимодействующего случая из таблицы 3.1.

4.7 Операторы с более чем четырьмя Q .

Неприводимый оператор $\tilde{\mathcal{K}}_q$ с $q > 4$ не имеет ненулевых вкладов в двухпетлевом приближении. Таким образом, неприводимый оператор \mathcal{K}_q может быть полностью выражен в виде линейной комбинации операторов чистого скейлинга $\mathcal{K}_{q'}^{(\mu)}$ с $q' < q$. В двухпетлевом приближении мы используем следующие соотношения, справедливые в двухпетлевом приближении

$$\begin{aligned} \left\langle \prod_{j=1}^q \text{sp } Q_{n_{k_j} n_{k_j}}^{\alpha_j \alpha_j} \right\rangle &\simeq \prod_{j=1}^q \left\langle \text{sp } Q_{n_{k_j} n_{k_j}}^{\alpha_j \alpha_j} \right\rangle + \prod_{j=1}^{q-2} \left\langle \text{sp } Q_{n_{k_j} n_{k_j}}^{\alpha_j \alpha_j} \right\rangle \\ &\times \frac{q(q-1)}{2} \left\langle \left\langle \text{sp } Q_{n_{k_{q-1}} n_{k_{q-1}}}^{\alpha_{q-1} \alpha_{q-1}} \cdot \text{sp } Q_{n_{k_q} n_{k_q}}^{\alpha_q \alpha_q} \right\rangle \right\rangle, \end{aligned} \quad (4.51)$$

$$\begin{aligned} \left\langle \text{sp} \left[Q_{n_{k_1} n_{k_2}}^{\alpha_1 \alpha_2} Q_{n_{k_2} n_{k_1}}^{\alpha_2 \alpha_1} \right] \prod_{j=3}^q \text{sp } Q_{n_{k_j} n_{k_j}}^{\alpha_j \alpha_j} \right\rangle &\simeq \prod_{j=1}^{q-2} \left\langle \text{sp } Q_{n_{k_j} n_{k_j}}^{\alpha_j \alpha_j} \right\rangle \\ &\times \left\langle \text{sp} \left[Q_{n_{k_{q-1}} n_{k_q}}^{\alpha_{q-1} \alpha_q} Q_{n_{k_q} n_{k_{q-1}}}^{\alpha_q \alpha_{q-1}} \right] \right\rangle + (q-2) \prod_{j=1}^{q-3} \left\langle \text{sp } Q_{n_{k_j} n_{k_j}}^{\alpha_j \alpha_j} \right\rangle \\ &\times \left\langle \left\langle \text{sp } Q_{n_{k_{q-3}} n_{k_{q-3}}}^{\alpha_{q-3} \alpha_{q-3}} \cdot \text{sp} \left[Q_{n_{k_{q-1}} n_{k_q}}^{\alpha_{q-1} \alpha_q} Q_{n_{k_q} n_{k_{q-1}}}^{\alpha_q \alpha_{q-1}} \right] \right\rangle \right\rangle, \end{aligned} \quad (4.52)$$

$$\begin{aligned} & \langle \text{sp} [Q_{n_{k_1} n_{k_2}}^{\alpha_1 \alpha_2} Q_{n_{k_2} n_{k_3}}^{\alpha_2 \alpha_3} Q_{n_{k_3} n_{k_1}}^{\alpha_3 \alpha_1}] \prod_{j=4}^q \text{sp} Q_{n_{k_j} n_{k_j}}^{\alpha_j \alpha_j} \rangle \simeq \prod_{j=4}^q \\ & \times \langle \text{sp} Q_{n_{k_j} n_{k_j}}^{\alpha_j \alpha_j} \rangle \langle \text{sp} [Q_{n_{k_1} n_{k_2}}^{\alpha_1 \alpha_2} Q_{n_{k_2} n_{k_3}}^{\alpha_2 \alpha_3} Q_{n_{k_3} n_{k_1}}^{\alpha_3 \alpha_1}] \rangle, \end{aligned} \quad (4.53)$$

$$\begin{aligned} & \langle \text{sp} [Q_{n_{k_1} n_{k_2}}^{\alpha_1 \alpha_2} Q_{n_{k_2} n_{k_3}}^{\alpha_2 \alpha_3} Q_{n_{k_3} n_{k_4}}^{\alpha_3 \alpha_4} Q_{n_{k_4} n_{k_1}}^{\alpha_4 \alpha_1}] \prod_{j=5}^q \text{sp} Q_{n_{k_j} n_{k_j}}^{\alpha_j \alpha_j} \rangle \simeq \prod_{j=5}^q \\ & \times \langle \text{sp} Q_{n_{k_j} n_{k_j}}^{\alpha_j \alpha_j} \rangle \langle \text{sp} [Q_{n_{k_1} n_{k_2}}^{\alpha_1 \alpha_2} Q_{n_{k_2} n_{k_3}}^{\alpha_2 \alpha_3} Q_{n_{k_3} n_{k_4}}^{\alpha_3 \alpha_4} Q_{n_{k_4} n_{k_1}}^{\alpha_4 \alpha_1}] \rangle, \end{aligned} \quad (4.54)$$

и

$$\begin{aligned} & \langle \text{sp} [Q_{n_{k_1} n_{k_2}}^{\alpha_1 \alpha_2} Q_{n_{k_2} n_{k_1}}^{\alpha_2 \alpha_1}] \text{sp} [Q_{n_{k_3} n_{k_4}}^{\alpha_3 \alpha_4} Q_{n_{k_4} n_{k_3}}^{\alpha_4 \alpha_3}] \prod_{j=5}^q \text{sp} Q_{n_{k_j} n_{k_j}}^{\alpha_j \alpha_j} \rangle \\ & \simeq \prod_{j=5}^q \langle \text{sp} Q_{n_{k_j} n_{k_j}}^{\alpha_j \alpha_j} \rangle \langle \text{sp} [Q_{n_{k_1} n_{k_2}}^{\alpha_1 \alpha_2} Q_{n_{k_2} n_{k_1}}^{\alpha_2 \alpha_1}] \\ & \times \text{sp} [Q_{n_{k_3} n_{k_4}}^{\alpha_3 \alpha_4} Q_{n_{k_4} n_{k_3}}^{\alpha_4 \alpha_3}] \rangle. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Используя Ур. (4.51) - (4.55), находим

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_q &= Z^{q/2} + \frac{q(q-1)}{6} Z^{(q-2)/2} \left(\mathcal{K}_2^{(-2)} + 2\mathcal{K}_2^{(1)} - 3Z \right) + \frac{\mu_{2,1,\dots,1}}{3} Z^{(q-2)/2} \left(\mathcal{K}_2^{(1)} - \tilde{\mathcal{K}}_2^{(-2)} \right) \\ &+ \frac{(q-2)}{30} \mu_{2,1,\dots,1} Z^{(q-3)/2} \left(-2\mathcal{K}_3^{(-6)} - 3\mathcal{K}_3^{(-1)} + 5\mathcal{K}_3^{(3)} - 10Z^{1/2}\mathcal{K}_2^{(1)} + 10Z^{1/2}\mathcal{K}_2^{(-2)} \right) \\ &+ \frac{\mu_{3,1,\dots,1}}{60} Z^{(q-3)/2} \left(4\mathcal{K}_3^{(-6)} - 9\mathcal{K}_3^{(-1)} + 5\mathcal{K}_3^{(3)} \right) \\ &+ \mu_{4,1,\dots,1} Z^{(q-4)/2} \left(-\frac{1}{105}\mathcal{K}_4^{(-12)} + \frac{2}{63}\mathcal{K}_4^{(-5)} + \frac{1}{180}\mathcal{K}_4^{(-2)} - \frac{2}{45}\mathcal{K}_4^{(1)} + \frac{1}{60}\mathcal{K}_4^{(6)} \right) \\ &+ \mu_{2,2,1,\dots,1} Z^{(q-4)/2} \left(\frac{1}{105}\mathcal{K}_4^{(-12)} - \frac{2}{63}\mathcal{K}_4^{(-5)} + \frac{7}{90}\mathcal{K}_4^{(-2)} - \frac{4}{45}\mathcal{K}_4^{(1)} + \frac{1}{30}\mathcal{K}_4^{(6)} \right). \end{aligned} \quad (4.56)$$

Из (4.56) получаем соотношение $\mathcal{K}_q = Z^{q/2} m'_q$ где m'_q дается Ур. (3.27) с коэффициентами b_j , определенными в Ур. (3.28). Тогда условие перенормируемости (4.39) эквивалентно Ур. (3.30).

4.8 Перенормировка фонового поля в однопетлевом приближении

В данном приложении мы приводим детали метода перенормировки фонового поля операторов \mathcal{K}_q (с $q = 3, 4$) в однопетлевом приближении.

Как и в основном тексте, разбиваем матричное поле Q на быстрые \hat{Q} и медленные $Q_0 = \mathcal{T}_0^{-1} \Lambda \mathcal{T}_0$ компоненты: $Q = \mathcal{T}_0^{-1} \hat{Q} \mathcal{T}_0$. В этом приложении мы будем рассматривать быстрые моды \hat{Q} путем разложения до самого низкого нетривиального порядка по W . Используя Ур. (3.18) и (3.21), в пределе $T \rightarrow 0$ получаем следующие известные правила слияния:

$$\langle \text{Tr}(AW) \text{Tr}(BW) \rangle = Y \text{Tr} \left(AB - \Lambda \Lambda B - ACB^T C + \Lambda \Lambda C B^T C \right), \quad Y = \frac{4}{g} \int_p \mathcal{D}_p(0) \quad (4.57)$$

и

$$\langle \text{Tr} AWBW \rangle = Y \left(\text{Tr} A \text{Tr} B - \text{Tr}(\Lambda A) \text{Tr}(\Lambda B) + \text{Tr} ACB^T C - \text{Tr} \Lambda \Lambda C B^T C \right). \quad (4.58)$$

Несколько замечаний. Сначала, Ур. (4.57) и (4.58) получены в предположении, что поля A и B медленные, в то время как W быстрые. Это позволяет пренебречь частотной зависимостью диффузных мод. Во-вторых, в связи с наличием взаимодействий слияния (4.57) и (4.58) включают в себя члены, конечные в инфракрасии и пропорциональные T . При $T = 0$ такими членами можно смело пренебречь, а слияния (4.57) и (4.58) аналогичны невзаимодействующим.

4.9 Операторы с тремя Q

Базис кубических по Q операторов включает следующие три оператора:

$$\mathcal{A}_{1,1,1} = \text{sp} Q_{nn}^{\alpha_1 \alpha_1} \text{sp} Q_{mm}^{\alpha_2 \alpha_2} \text{sp} Q_{kk}^{\alpha_3 \alpha_3}, \quad (4.59)$$

$$\mathcal{A}_{2,1} = \text{sp}[Q_{nm}^{\alpha_1 \alpha_2} Q_{mn}^{\alpha_2 \alpha_1}] \text{sp} Q_{kk}^{\alpha_3 \alpha_3},$$

$$\mathcal{A}_3 = \text{sp}[Q_{nm}^{\alpha_1 \alpha_2} Q_{mk}^{\alpha_2 \alpha_3} Q_{kn}^{\alpha_3 \alpha_1}]. \quad (4.60)$$

В однопетлевом приближении (4.57) и (4.58) их преобразование при перенормировке фонового поля выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}_{1,1,1}[Q] \\ \mathcal{A}_{2,1}[Q] \\ \mathcal{A}_3[Q] \end{pmatrix} = [1 + 3(Z^{1/2} - 1)] \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{1,1,1}[Q_0] \\ \mathcal{A}_{2,1}[Q_0] \\ \mathcal{A}_3[Q_0] \end{pmatrix} + Y \mathcal{M}_3 \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{1,1,1}[Q_0] \\ \mathcal{A}_{1,2}[Q_0] \\ \mathcal{A}_3[Q_0] \end{pmatrix}, \quad (4.61)$$

где матрица

$$\mathcal{M}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 0 \\ -1 & 1 & -4 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}. \quad (4.62)$$

Собственные значения (со знаком минус) матрицы \mathcal{M}_3 равны $\lambda_2^{(1)} = -6$, $\lambda_2^{(2)} = -1$ и $\lambda_2^{(3)} = 3$. Соответствующие собственные операторы

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_2^{(-6)} &= \mathcal{A}_{1,1,1} - 6\mathcal{A}_{2,1} + 8\mathcal{A}_3, \\ \mathcal{P}_2^{(-1)} &= \mathcal{A}_{1,1,1} - \mathcal{A}_{2,1} - 2\mathcal{A}_3, \\ \mathcal{P}_2^{(3)} &= \mathcal{A}_{1,1,1} + 3\mathcal{A}_{2,1} + 2\mathcal{A}_3. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Это означает в точности те же значения $\mu_{2,1}$ и μ_3 , как в таблице 3.1.

4.10 Операторы с четырьмя Q

Для операторов с четырьмя Q мы используем следующий базис:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{1,1,1,1} &= \text{sp } Q_{nn}^{\alpha_1\alpha_1} \text{ sp } Q_{mm}^{\alpha_2\alpha_2} \text{ sp } Q_{kk}^{\alpha_3\alpha_3} \text{ sp } Q_{ll}^{\alpha_4\alpha_4}, \\ \mathcal{A}_{2,1,1} &= \text{sp } [Q_{nm}^{\alpha_1\alpha_2} Q_{mn}^{\alpha_2\alpha_1}] \text{ sp } Q_{kk}^{\alpha_3\alpha_3} \text{ sp } Q_{ll}^{\alpha_4\alpha_4}, \\ \mathcal{A}_{3,1} &= \text{sp } [Q_{nm}^{\alpha_1\alpha_2} Q_{mk}^{\alpha_2\alpha_3} Q_{kn}^{\alpha_3\alpha_1}] \text{ sp } Q_{ll}^{\alpha_4\alpha_4}, \\ \mathcal{A}_4 &= \text{sp } [Q_{nm}^{\alpha_1\alpha_2} Q_{mk}^{\alpha_2\alpha_3} Q_{kl}^{\alpha_3\alpha_4} Q_{ln}^{\alpha_4\alpha_1}], \\ \mathcal{A}_{2,2} &= \text{sp } [Q_{nm}^{\alpha_1\alpha_2} Q_{mn}^{\alpha_2\alpha_1}] \text{ sp } [Q_{kl}^{\alpha_3\alpha_4} Q_{lk}^{\alpha_4\alpha_3}]. \end{aligned} \quad (4.64)$$

В однопетлевом приближении (4.57) и (4.58) они меняются при перенормировке методом фонового поля следующим образом:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{1,1,1,1}[Q] \\ \mathcal{A}_{2,1,1}[Q] \\ \mathcal{A}_{2,2}[Q] \\ \mathcal{A}_{3,1}[Q] \\ \mathcal{A}_4[Q] \end{pmatrix} &= [1 + 4(Z^{1/2} - 1)] \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{1,1,1,1}[Q_0] \\ \mathcal{A}_{2,1,1}[Q_0] \\ \mathcal{A}_{2,2}[Q_0] \\ \mathcal{A}_{3,1}[Q_0] \\ \mathcal{A}_4[Q_0] \end{pmatrix} \\ &+ Y \mathcal{M}_4 \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{1,1,1,1}[Q_0] \\ \mathcal{A}_{2,1,1}[Q_0] \\ \mathcal{A}_{2,2}[Q_0] \\ \mathcal{A}_{3,1}[Q_0] \\ \mathcal{A}_4[Q_0] \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.65)$$

где матрица

$$\mathcal{M}_4 = \begin{pmatrix} 0 & -12 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & -8 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & -8 \\ 0 & -3 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & 6 \end{pmatrix}. \quad (4.66)$$

Собственные значения (со знаком минус) матрицы \mathcal{M}_4 равны $\lambda_4^{(1)} = -12$, $\lambda_4^{(2)} = -5$, $\lambda_4^{(3)} = -2$, $\lambda_4^{(4)} = 1$, и $\lambda_4^{(5)} = 6$. Соответствующие собственные операторы

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_4^{(-12)} &= \mathcal{A}_{1,1,1,1} - 12\mathcal{A}_{2,1,1} + 12\mathcal{A}_{2,2} + 32\mathcal{A}_{3,1} - 48\mathcal{A}_4, \\ \mathcal{P}_4^{(-5)} &= \mathcal{A}_{1,1,1,1} - 5\mathcal{A}_{2,1,1} + 3\mathcal{A}_{2,2} + 8\mathcal{A}_{3,1} + 6\mathcal{A}_4, \\ \mathcal{P}_4^{(-2)} &= \mathcal{A}_{1,1,1,1} - 2\mathcal{A}_{2,1,1} + 7\mathcal{A}_{2,2} - 8\mathcal{A}_{3,1} + 2\mathcal{A}_4, \\ \mathcal{P}_4^{(1)} &= \mathcal{A}_{1,1,1,1} + \mathcal{A}_{2,1,1} - 2\mathcal{A}_{2,2} - 2\mathcal{A}_{3,1} - 4\mathcal{A}_4, \\ \mathcal{P}_4^{(6)} &= \mathcal{A}_{1,1,1,1} + 6\mathcal{A}_{2,1,1} + 3\mathcal{A}_{2,2} + 8\mathcal{A}_{3,1} + 6\mathcal{A}_4. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Это означает в точности те же значения $\mu_{2,1,1}$, $\mu_{3,1}$, $\mu_{2,2}$ и μ_4 как в таблице 3.1.

Список литературы

- [1] A. A. Abrikosov. North-Holland, Amsterdam, New York, 1988.
- [2] A. A. Abrikosov and L. P. Gor'kov. Contribution to the theory of superconducting alloys with paramagnetic impurities. *Sov. Phys. JETP*, 12:1243, 1961.
- [3] I. Aleiner, P. Brouwer, and L. Glazman. Quantum effects in Coulomb blockade. *Phys. Rep.*, 358:309, 2002.
- [4] I. L. Aleiner and V. I. Fal'ko. Spin-orbit coupling effects on quantum transport in lateral semiconductor dots. *Phys. Rev. Lett.*, 87:256801, 2001.
- [5] Y. Alhassid, K. N. Nesterov, and S. Schmidt. The coexistence of superconductivity and ferromagnetism in nano-scale metallic grains. *Physica Scripta*, 2012(T151):014047, 2012.
- [6] Y. Alhassid and T. Rupp. Effects of spin and exchange interaction on the Coulomb-blockade peak statistics in quantum dots. *Phys. Rev. Lett.*, 91:056801, 2003.
- [7] Y. Alhassid and T. Rupp. A universal Hamiltonian for a quantum dot in the presence of spin-orbit interaction. 2003.
- [8] B. L. Al'tshuler and A. G. Aronov. Contribution to the theory of disordered metals in strongly doped semiconductors. *Sov. Phys. JETP*, 50, 1979.
- [9] B. L. Altshuler and A. G. Aronov. Electron-electron interactions in disordered conductors. Elsevier Science Publishers, North-Holland, 1985.
- [10] B. L. Al'tshuler, A. G. Aronov, and P. A. Lee. Interaction effects in disordered Fermi systems in two dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, 44:1288, 1980.

- [11] M. Amini, V. E. Kravtsov, and M. Müller. Multifractality and quantum-to-classical crossover in the Coulomb anomaly at the Mott-Anderson metal-insulator transition. *New J. Phys.*, 16:015022, 2014.
- [12] D. J. Amit. Field Theory, the Renormalization Group, and Critical Phenomena. World Scientific, Singapore, 1993.
- [13] P. W. Anderson, E. Abrahams, and T. V. Ramakrishnan. Possible explanation of nonlinear conductivity in thin-film metal wires. *Phys. Rev. Lett.*, 43:718–720, Sep 1979.
- [14] A. G. Aronov and A. Y. Zyuzin. Thermodynamics of electrons in disordered conductors with kondo impurities. *JETP Lett.*, 39:444, 1984.
- [15] M. A. Baranov, A. M. M. Pruisken, and B. Škorič. (Mis-)handling gauge invariance in the theory of the quantum hall effect. I. Unifying action and the $\nu = 1/2$ state. *Phys. Rev. B*, 60:16807, 1999.
- [16] M. A. Baranov, A. M. M. Pruisken, and B. Škorič. (Mis-)handling gauge invariance in the theory of the quantum hall effect. II. Perturbative results. *Phys. Rev. B*, 60:16821, 1999.
- [17] D. Belitz and T. R. Kirkpatrick. The Anderson-Mott transition. *Rev. Mod. Phys.*, 66(2):261, 1994.
- [18] Y. M. Blanter. Electron-electron scattering rate in disordered mesoscopic systems. *Phys. Rev. B*, 54:12807, 1996.
- [19] L. Borda, L. Fritz, N. Andrei, and G. Zaránd. Theory of inelastic scattering from quantum impurities. *Phys. Rev. B*, 75:235112, 2007.
- [20] I. S. Burmistrov, Y. Gefen, and M. N. Kiselev. Spin and charge correlations in quantum dots: An exact solution. *JETP Lett.*, 92:179, 2010.
- [21] I. S. Burmistrov, Y. Gefen, and M. N. Kiselev. Exact solution for spin and charge correlations in quantum dots: Effect of level fluctuations and Zeeman splitting. *Phys. Rev. B*, 85:155311, 2012.
- [22] I. S. Burmistrov, I. V. Gornyi, and A. D. Mirlin. Multifractality at Anderson transitions with Coulomb interaction. *Phys. Rev. Lett.*, 111:066601, 2013.

- [23] I. S. Burmistrov, I. V. Gornyi, and A. D. Mirlin. Multifractality and electron-electron interaction at Anderson transitions. *Phys. Rev. B*, 91:085427, 2015.
- [24] I. S. Burmistrov, I. V. Gornyi, and A. D. Mirlin. Tunneling into the localized phase near Anderson transitions with Coulomb interaction. *Phys. Rev. B*, 89:035430, 2015.
- [25] C. Castellani, C. Di Castro, P. A. Lee, and M. Ma. Interaction-driven metal-insulator transitions in disordered fermion systems. *Phys. Rev. B*, 30:527, 1984.
- [26] C. Castellani and L. Peliti. Multifractal wavefunction at the localisation threshold. *J. Phys. A*, 19:L429, 1986.
- [27] M. Chertkov and I. Kolokolov. Equilibrium dynamics of a paramagnetic cluster. *Phys. Rev. B*, 51:3974, 1995.
- [28] M. Chertkov and I. V. Kolokolov. Equilibrium and nonequilibrium mean-field dynamics of quantum spin cluster. *Sov. Phys. JETP*, 79:824, 1994.
- [29] K. B. Efetov, A. I. Larkin, and D. E. Khmel'nitskii. Interaction of diffusion modes in the theory of localization. *Sov. Phys. JETP*, 52:568, 1980.
- [30] A. L. Efros and B. I. Shklovskii. Coulomb gap and low temperature conductivity of disordered systems. *J. Phys. C*, 8:L49, 1975.
- [31] A. M. Finkelstein. Influence of coulomb interaction on the properties of disordered metals. *JETP*, 57:97, 1983.
- [32] A. M. Finkelstein. On the frequency and temperature dependence of the conductivity near a metal-insulator transition. *JETP Lett.*, 37:517, 1983.
- [33] A. M. Finkelstein. Metal-insulator transition in a disordered system. *JETP*, 59:212, 1984.
- [34] A. M. Finkelstein. *Electron Liquid in Disordered Conductors*, volume 14 of *Soviet scientific reviews*. Harwood Academic Publishers, 1990.
- [35] R. Friedberg and J. M. Luttinger. Density of electronic energy levels in disordered systems. *Phys. Rev. B*, 12:4460, 1975.

- [36] M. Garst, P. Wölfle, L. Borda, J. von Delft, and L. Glazman. Energy-resolved inelastic electron scattering off a magnetic impurity. *Phys. Rev. B*, 72:205125, Nov 2005.
- [37] L. P. Gor'kov, A. I. Larkin, and D. E. Khmel'nitskii. Particle conductivity in a two-dimensional random potential. *JETP Lett.*, 30:228, 1979.
- [38] I. A. Gruzberg, A. D. Mirlin, and M. R. Zirnbauer. Classification and symmetry properties of scaling dimensions at Anderson transitions. *Phys. Rev. B*, 87:125144, 2013.
- [39] C. V. Haesendonck, J. Vranken, and Y. Bruynseraede. Resonant Kondo scattering of weakly localized electrons. *Phys. Rev. Lett.*, 58:1968, 1987.
- [40] Y. Harashima and K. Slevin. Effect of electron-electron interaction near the metal-insulator transition in doped semiconductors studied within the local density approximation. *Int. J. Mod. Phys. Conf. Ser.*, 11:90, 2012.
- [41] Y. Harashima and K. Slevin. Critical exponent of metal-insulator transition in doped semiconductors: The relevance of the Coulomb interaction. *Phys. Rev. B*, 89:205108, 2014.
- [42] D. Höf and F. Wegner. Calculation of anomalous dimensions for the nonlinear sigma model. *Nucl. Phys. B*, 275:561, 1986.
- [43] O. Kashuba, L. I. Glazman, and V. I. Fal'ko. Influence of spin dynamics of defects on weak localization in paramagnetic two-dimensional metals. *Phys. Rev. B*, 93:045206, 2016.
- [44] S. Kettemann and E. R. Mucciolo. Free magnetic moments in disordered systems. *JETP Lett.*, 83:284, 2006.
- [45] S. Kettemann and E. R. Mucciolo. Disorder-quenched Kondo effect in mesoscopic electronic systems. *Phys. Rev. B*, 75:184407, 2007.
- [46] I. Kolokolov. Functional representation for the partition function of the quantum Heisenberg ferromagnet. *Phys. Lett. A*, 114:99, 1986.
- [47] I. Kolokolov. Functional integration for quantum magnets: New method and new results. *Ann. Phys. (N.Y.)*, 202:165, 1990.

- [48] I. Kolokolov. A functional integration method for quantum spin systems and one-dimensional localization. *Int. J. Modern Phys. B*, 10:2189, 1996.
- [49] J. Kondo. Resistance minimum in dilute magnetic alloys. *Prog. Theor. Phys.*, 32:37, 1964.
- [50] J. König and Y. Gefen. Coherence and partial coherence in interacting electron systems. *Phys. Rev. Lett.*, 86:3855, 2001.
- [51] J. König and Y. Gefen. Aharonov-Bohm interferometry with interacting quantum dots: Spin configurations, asymmetric interference patterns, bias-voltage-induced Aharonov-Bohm oscillations, and symmetries of transport coefficients. *Phys. Rev. B*, 65:045316, 2002.
- [52] I. L. Kurland, I. L. Aleiner, and B. L. Altshuler. Mesoscopic magnetization fluctuations for metallic grains close to the Stoner instability. *Phys. Rev. B*, 62:14886, 2000.
- [53] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. Butterworth-Heinemann, 1981.
- [54] P. Lee. Scaling studies of localization. *J. Non-Crist. Solids*, 35-36:21, 1980.
- [55] D. S. Lyubshin, A. U. Sharafutdinov, and I. S. Burmistrov. Statistics of spin fluctuations in quantum dots with Ising exchange. *Phys. Rev. B*, 89:201304, 2014.
- [56] G. D. Mahan. Plenum Press, New York, 1990.
- [57] F. M. Marchetti and B. D. Simons. Tail states in disordered superconductors with magnetic impurities: the unitarity limit. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 35:4201, 2002.
- [58] W. L. McMillan. Scaling theory of the metal-insulator transition in amorphous materials. *Phys. Rev. B*, 24:2739, 1981.
- [59] M. L. Mehta. Academic, Boston, 1991.
- [60] T. Micklitz, A. Altland, T. A. Costi, and A. Rosch. Universal dephasing rate due to diluted Kondo impurities. *Phys. Rev. Lett.*, 96:226601, 2006.
- [61] T. Micklitz, T. A. Costi, and A. Rosch. Magnetic field dependence of dephasing rate due to diluted kondo impurities. *Phys. Rev. B*, 75:054406, 2007.

- [62] G. M. Minkov, A. V. Germanenko, O. E. Rut, and A. A. Sherstobitov. Interaction correction to the conductivity of two-dimensional electron gas in $\text{In}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}/\text{InP}$ quantum well structure with strong spin-orbit coupling. *Phys. Rev. B*, 85:125303, 2012.
- [63] G. M. Minkov, A. V. Germanenko, O. E. Rut, A. A. Sherstobitov, A. K. Bakarov, and D. V. Dmitriev. Interaction correction to conductivity of $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}/\text{GaAs}$ double quantum well heterostructures near the balance. *Phys. Rev. B*, 84:075337, 2011.
- [64] G. M. Minkov, A. V. Germanenko, O. E. Rut, A. A. Sherstobitov, and B. N. Zvonkov. Disorder and temperature renormalization of interaction contribution to the conductivity in two-dimensional $\text{In}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ electron systems. *Phys. Rev. B*, 79:235335, 2009.
- [65] B. N. Narozhny, I. L. Aleiner, and A. I. Larkin. Magnetic fluctuations in two-dimensional metals close to the Stoner instability. *Phys. Rev. B*, 62:14898, 2000.
- [66] K. N. Nesterov and Y. Alhassid. Thermodynamics of ultrasmall metallic grains in the presence of pairing and exchange correlations: Mesoscopic fluctuations. *Phys. Rev. B*, 87:014515, 2013.
- [67] K. N. Nesterov and Y. Alhassid. Magnetic response of energy levels of superconducting nanoparticles with spin-orbit scattering. *Phys. Rev. B*, 92:144508, 2015.
- [68] F. J. Ohkawa and H. Fukuyama. Kondo effect and magnetoresistance in weakly localized regime. *J. Phys. Soc. Japan*, 53:2640, 1984.
- [69] F. J. Ohkawa, H. Fukuyama, and K. Yosida. Kondo effect in disordered two-dimensional systems. *J. Phys. Soc. Japan*, 52:1701, 1983.
- [70] I. Paul. Interaction correction of conductivity near a ferromagnetic quantum critical point. *Phys. Rev. B*, 77:224418, 2008.
- [71] R. P. Peters, G. Bergmann, and R. M. Mueller. Kondo maximum of magnetic scattering. *Phys. Rev. Lett.*, 58:1964, 1987.
- [72] A. M. M. Pruisken and M. Voropaev. Private communication, 2010.
- [73] M. Reznikov, A. Y. Kuntsevich, N. Tenen, and V. M. Pudalov. Thermodynamic magnetization of two-dimensional electron gas measured over wide range of densities. *JETP Lett.*, 92:470, 2010.

- [74] A. Saha, Y. Gefen, I. Burmistrov, A. Shnirman, and A. Altland. A quantum dot close to Stoner instability: The role of the Berry phase. *Ann. Phys. (N.Y.)*, 327:2543, 2012.
- [75] M. Schechter. Spin magnetization of small metallic grains. *Phys. Rev. B*, 70:024521, 2004.
- [76] S. Schmidt and Y. Alhassid. Mesoscopic competition of superconductivity and ferromagnetism: Conductance peak statistics for metallic grains. *Phys. Rev. Lett.*, 101:207003, 2008.
- [77] S. Schmidt, Y. Alhassid, and K. V. Houcke. Effect of a Zeeman field on the transition from superconductivity to ferromagnetism in metallic grains. *EPL*, 80:47004, 2007.
- [78] J. R. Schrieffer and P. A. Wolff. Relation between the Anderson and Kondo Hamiltonians. *Phys. Rev.*, 149:491, 1966.
- [79] A. U. Sharafutdinov, D. S. Lyubshin, and I. S. Burmistrov. Spin fluctuations in quantum dots. *Phys. Rev. B*, 90:195308, 2014.
- [80] B. I. Shklovskii and A. L. Efros. Electronic properties of doped semiconductors. Springer, New York, 1984.
- [81] A. Shnirman, Y. Gefen, A. Saha, I. S. Burmistrov, M. N. Kiselev, and A. Altland. Geometric quantum noise of spin. *Phys. Rev. Lett.*, 114:176806, 2015.
- [82] A. Shnirman, A. Saha, I. S. Burmistrov, M. N. Kiselev, A. Altland, and Y. Gefen. U(1) and SU(2) quantum dissipative systems: The Caldeira-Leggett vs. the Ambegaokar-Eckern-Schön approaches. *JETP*, 122:576, 2016.
- [83] U. Sivan, Y. Imry, and A. G. Aronov. Quasi-particle lifetime in a quantum dot. *EPL (Europhysics Letters)*, 28:115, 1994.
- [84] B. Sothmann, J. König, and Y. Gefen. Mesoscopic Stoner instability in metallic nanoparticles revealed by shot noise. *Phys. Rev. Lett.*, 108:166603, 2012.
- [85] S. Suga, H. Kasai, and A. Okiji. Effect of a magnetic impurity on the conductivity in the weakly localized regime. *J. Phys. Soc. Japan*, 55:2515, 1986.

- [86] S. Suga, H. Kasai, and A. Okiji. Susceptibility of a magnetic impurity in weakly localized regime. *J. Phys. Soc. Japan*, 56:4522, 1987.
- [87] N. Tenen, A. Y. Kuntsevich, V. M. Pudalov, and M. Reznikov. Spindroplet state of an interacting 2D electron system. *Phys. Rev. Lett.*, 109:226403, 2012.
- [88] C. Timm. Tunneling through molecules and quantum dots: Master-equation approaches. *Phys. Rev. B*, 77:195416, 2008.
- [89] G. Usaj and H. U. Baranger. Exchange and the Coulomb blockade: Peak height statistics in quantum dots. *Phys. Rev. B*, 67:121308, 2003.
- [90] K. Van Houcke, Y. Alhassid, S. Schmidt, and S. M. A. Rombouts. The competition between superconductivity and ferromagnetism in small metallic grains: Thermodynamic properties. 2010.
- [91] M. G. Vavilov and L. I. Glazman. Conductance of mesoscopic systems with magnetic impurities. *Phys. Rev. B*, 67:115310, 2003.
- [92] M. G. Vavilov and L. I. Glazman. Conductance of mesoscopic systems with magnetic impurities. *Phys. Rev. B*, 67:115310, 2003.
- [93] K. Vladár and G. T. Zimányi. *J. Phys. C.: Solid State Phys.*, 18:3739, 1985.
- [94] F. Wegner. The mobility edge problem: Continuous symmetry and a conjecture. *Z. Phys.B: Condensed Matter*, 35:207, 1979.
- [95] F. Wegner. Inverse participation ratio in $2 + \epsilon$ dimensions. *Z. Phys.B*, 36:209, 1980.
- [96] F. Wegner. Anomalous dimensions for the nonlinear sigma-model in $2 + \epsilon$ dimensions (I). *Nucl. Phys. B*, 280:193, 1987.
- [97] F. Wegner. Anomalous dimensions for the nonlinear sigma-model, in $2 + \epsilon$ dimensions (II). *Nucl. Phys. B*, 280:210, 1987.
- [98] J. Wei and E. Norman. Lie algebraic solution of linear differential equations. *J. Math. Phys.*, 4:575, 1963.
- [99] Z.-J. Ying, M. Cuoco, C. Noce, and H.-Q. Zhou. Coexistence of spin polarization and pairing correlations in metallic grains. *Phys. Rev. B*, 74:012503, 2006.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

99

- [100] Z.-J. Ying, M. Cuoco, C. Noce, and H.-Q. Zhou. Field response of metallic grains with magnetic and pairing correlations. *Phys. Rev. B*, 74:214506, 2006.
- [101] G. Zaránd, L. Borda, J. von Delft, and N. Andrei. Theory of inelastic scattering from magnetic impurities. *Phys. Rev. Lett.*, 93:107204, 2004.